

Etude théorique et numérique des propriétés des structures à bandes interdites photoniques

Boris GRALAK

29 août 2001

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du Centre de Physique Théorique de Marseille qui m'ont accompagné et conseillé lors du choix de cette thèse : Jean-Michel COMBES, Valentin ZAGREBNOV, Thierry MARTIN et Ricardo LIMA. Je tiens ensuite à remercier les personnes qui ont accepté de me recevoir : Daniel MAYSTRE, Gérard TAYEB, Philippe REFREGIER, Enrique ANDJEL, Etienne PARDOUX, Pierre MATHIEU et Pierre PICCO.

Je remercie particulièrement Gérard TAYEB et Daniel MAYSTRE pour m'avoir accueilli au Laboratoire d'Optique Electromagnétique et pour avoir accepté de diriger cette thèse avec Stefan ENOCH : je les remercie tous les trois pour la qualité de leur encadrement, leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont toujours accordée.

Je remercie également une fois de plus Jean-Michel COMBES et Valentin ZAGREBNOV qui ont suivi le déroulement de cette thèse.

Je remercie l'ensemble des membres des équipes C.L.A.R.T.E. et T.E.M. de l'Institut Fresnel (ex-Laboratoire d'Optique Electromagnétique) : j'ai beaucoup apprécié l'environnement scientifique et humain qu'ils constituent. Je remercie en particulier Frédéric ZOLLA, Charles-Antoine GUERIN, Sébastien GUENNEAU, Anne SENTENAC, Evgueni POPOV, Patrick VINCENT ainsi que Didier FELBACQ et Jean-Michel COMBES pour leur aide et pour les discussions fructueuses que nous avons eues durant cette thèse.

Enfin, je remercie les membres du jury de cette thèse : Adriaan TIP et Didier FELBACQ qui ont accepté de rapporter cette thèse, Jean-Michel COMBES, Philippe LALANNE, Gérard TAYEB, Daniel MAYSTRE et Stefan ENOCH.

Je m'autorise un "coucou!" au collectif de thésards de l'ex-L.O.E. ainsi qu'à quelques amis¹ : Anne-Laure, Gilles, Gab et Julie, Boris, le jeune Nicolas, Stephane, Marie et Seb.

1. Fred, Laurent, Fabien, le club gymnique Saint Giniez, Luc, Tatiana, Antoine, Vincent, Julien, Seb, Martin, Youri, Dédé et Janine, Robert et Housman, le premier mai 2001, Katia, Caro, Natachka, Doro ...

Table des matières

Introduction générale	1
Intérêt des cristaux photoniques	3
Les réalisations expérimentales de cristaux photoniques	4
Choix du modèle	5
Objectifs de recherche	6
Plan du mémoire	7
Mode d'emploi du mémoire	9
Les équations de Maxwell	11
Les équations de Maxwell dans des matériaux diélectriques parfaits	13
Les équations de Maxwell harmoniques	14
Hypothèses sur la permittivité et la perméabilité	14
I Propriétés des cristaux photoniques parfaits	15
Première partie : introduction	17
1 Le spectre de l'opérateur de Maxwell	19
1.1 Description du cristal photonique parfait	19
1.2 Les solutions des équations de Maxwell d'énergie finie	20
1.3 Définition de l'opérateur de Maxwell	21
1.4 Solution des équations de Maxwell	23
1.5 Le spectre de l'opérateur de Maxwell	24
1.6 Le théorème de Bloch : les conséquences physiques des symétries	26
1.7 La théorie de Floquet : décomposition de l'opérateur de Maxwell	27
1.7.1 La transformation de Floquet-Bloch	28
1.7.2 Les conséquences de la décomposition de Floquet	29
1.7.3 Conclusion	30
1.8 Conclusion	30
2 Comportement du champ électromagnétique dans un cristal parfait	33
2.1 Le contrôle de l'émission spontanée	34
2.1.1 Le modèle quantique	34
2.1.2 Définition de la densité d'état	37
2.1.3 Comportement aux temps courts : la règle d'or de Fermi	39
2.1.4 Comportement aux temps longs : la méthode de Weisskopf et Wigner	40
2.1.5 Canalisation de l'émission spontanée dans un angle solide	41

2.1.6	Conclusion	43
2.2	Trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal photonique parfait	43
2.2.1	Définition de la trajectoire du champ électromagnétique	43
2.2.2	Première transformation de la “vitesse” du champ électromagnétique : utilisation de la transformation de Floquet-Bloch	44
2.2.3	Le résultat de P. Yeh : relation avec la vitesse de groupe	46
2.2.4	Trajectoire d’un paquet de solutions harmoniques	46
2.2.5	Trajectoire d’une solution des équations de Maxwell proche d’une fonction harmonique	49
2.2.6	Conclusion	51
Première partie : conclusion		53
II Etude théorique de la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel		55
Deuxième partie : introduction		57
3	La méthode des matrices de transfert	59
3.1	Description du cristal photonique monodimensionnel d’épaisseur finie	59
3.2	Hypothèses sur le champ électromagnétique harmonique	61
3.3	Méthode de résolution des équations de Maxwell dans le cristal : les matrices de transfert	63
3.3.1	Définition des matrices de transfert	64
3.3.2	La matrice de transfert à travers la couche élémentaire : la matrice T	65
3.3.3	La matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1	66
3.3.4	Conséquences de la conservation du flux du vecteur de Poynting	68
3.3.5	Conséquences de la symétrie d’une couche élémentaire par rapport à un plan horizontal	69
3.4	Les conditions aux limites du cristal : la condition d’onde sortante	69
3.5	Expression du champ électromagnétique diffracté par le cristal photonique monodimensionnel	71
3.5.1	Les valeurs propres de la matrice T	71
3.5.2	Expression de la matrice de transfert à travers le cristal	72
3.5.3	Expression des coefficients de transmission et de réflexion	72
3.5.4	Expression du champ électromagnétique diffracté par le cristal photonique monodimensionnel	73
3.6	Conclusion	74
4	Propriétés du champ diffracté à la limite thermodynamique	75
4.1	Le domaine de transparence et le domaine interdit dans un cristal photonique monodimensionnel parfait	76
4.1.1	La relation de dispersion	76
4.1.2	Définition des domaines de transparence et interdit	77
4.2	Le domaine de transparence et le domaine interdit dans un cristal photonique monodimensionnel à la limite thermodynamique	78
4.2.1	Limite simple des coefficients de transmission et de réflexion	78

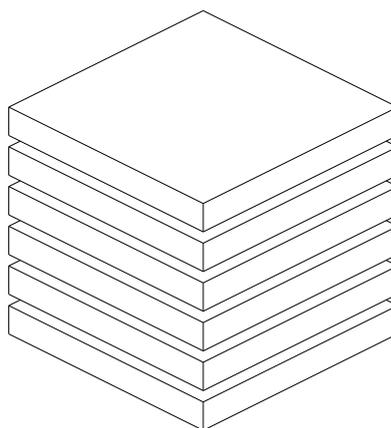
4.2.2	Illustration de la convergence simple des coefficients de transmission et de réflexion	80
4.3	Lemme fondamental	81
4.4	Le champ diffracté à la limite thermodynamique	84
4.4.1	Limite uniforme sur tout compact du champ diffracté	85
4.4.2	Interprétation physique du flux du vecteur de Poynting de la limite uniforme du champ diffracté	87
4.4.3	Interprétation physique de la limite du coefficient de réflexion	90
4.4.4	Limite en moyenne quadratique du champ diffracté	93
4.4.5	Conclusion	95
4.5	Le flux du vecteur de Poynting à la limite thermodynamique	96
4.5.1	Expression du flux du vecteur de Poynting	96
4.5.2	Limite du flux du vecteur de Poynting	97
4.5.3	Interprétation physique de la limite du flux du vecteur de Poynting : la théorie des rayons	98
4.5.4	Illustration de la théorie des rayons : exemple numérique	101
4.6	Le centre de l'énergie électromagnétique à la limite thermodynamique	102
4.6.1	Expression du centre de l'énergie électromagnétique	103
4.6.2	Limite du centre de l'énergie électromagnétique	106
4.6.3	Interprétation physique de la limite du centre de l'énergie : la vitesse de groupe	109
4.7	Récapitulation	113
Deuxième partie : conclusion		115
 III Etude numérique des propriétés des cristaux photoniques		 117
Troisième partie : introduction		119
 5 Présentation du code numérique		 121
5.1	Modélisation de la structure “tas de bois” : l'empilement de réseaux	122
5.1.1	Description de l'empilement de réseaux	122
5.1.2	Description de la structure “tas de bois”	123
5.2	Le champ électromagnétique harmonique en présence d'un réseau bidimensionnel	125
5.2.1	Hypothèse sur le champ électromagnétique harmonique	126
5.2.2	Conséquence des symétries : décomposition de Floquet partielle	126
5.3	Démarche générale du code numérique : la méthode réseau	127
5.4	Développement du champ électromagnétique dans le cristal	128
5.4.1	Développement dans la base de Fourier	128
5.4.2	Le résultat de L. Li : réduction du problème général à deux problèmes scalaires indépendants	129
5.4.3	Développement dans la base des fonctions propres exactes	131
5.4.4	Développement du champ électromagnétique dans une couche lamellaire	133
5.4.5	Algorithme d'empilement des couches lamellaires	133

5.5	Premier type de conditions aux limites du cristal : la condition d'onde sortante	136
5.5.1	Développement du champ électromagnétique à l'extérieur de la structure "tas de bois"	136
5.5.2	Définition du champ incident	138
5.5.3	Définition des efficacités du champ diffracté	140
5.5.4	Test de convergence des efficacités diffractées	142
5.6	Second type de conditions aux limites du cristal : la condition de Bloch	145
5.6.1	Définition de la condition de Bloch	146
5.6.2	Algorithme de type matrice R pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert à travers une couche réseau	147
5.6.3	Algorithme de type matrice S pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert à travers une couche réseau	148
5.6.4	Test de convergence de la relation de dispersion	149
5.7	Conclusion : situation de nos méthodes numériques	150
5.7.1	Situation de notre démarche générale pour déterminer la relation de dispersion : la méthode réseau	151
5.7.2	Situation de notre méthode pour résoudre les équations de Maxwell en présence d'un cristal photonique "tas de bois"	154
6	Etude numérique de la diffraction par un cristal photonique	155
6.1	Phénomènes de réfraction inhabituels	156
6.1.1	Mise en évidence numérique de l'ultra-réfraction dans un cristal photonique monodimensionnel	156
6.1.2	Mise en évidence numérique de la réfraction négative dans un cristal photonique bidimensionnel	158
6.1.3	Mise en évidence numérique d'une lentille concave convergente	161
6.2	Influence d'une interface plane quelconque séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur	166
6.2.1	Description de la structure	167
6.2.2	Symétries de la structure	167
6.2.3	Hypothèse sur le champ électromagnétique harmonique	168
6.2.4	Conséquence des symétries : décomposition de Floquet partielle	168
6.2.5	Influence d'une interface plane séparant un milieu homogène et un cristal monodimensionnel	169
6.2.6	Conclusion	170
6.3	Mise en évidence numérique de l'influence d'une interface plane séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur	171
6.3.1	Exemple numérique de référence	171
6.3.2	Mise en évidence numérique de l'influence d'une interface plane	172
6.3.3	Conclusion	175
6.4	Etude de l'influence d'une interface quelconque suffisamment régulière séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur	175
6.4.1	Diffraction par un cristal photonique monodimensionnel de forme quelconque dans le domaine de l'optique géométrique	175
6.4.2	Etude numérique de l'influence d'une interface cylindrique séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur	176
6.5	Conclusion	179

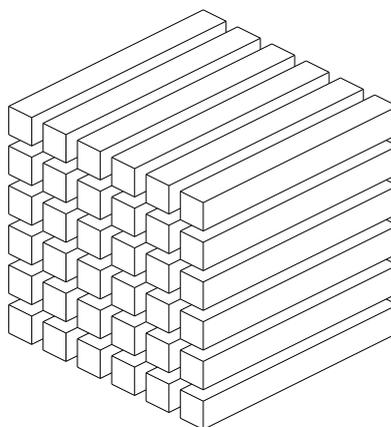
7	Etude numérique des propriétés des cristaux photoniques “tas de bois”	181
7.1	Description du cristal photonique étudié	182
7.1.1	Description de la couche élémentaire du cristal photonique	182
7.1.2	Définition du cristal photonique périodique	184
7.1.3	Définition du cristal photonique d’épaisseur finie	184
7.1.4	Les symétries du cristal photonique	184
7.2	Etude numérique de la relation de dispersion	185
7.2.1	Représentation de la relation de dispersion	186
7.2.2	La relation de dispersion d’un cristal photonique constitué de tiges de silicium entourées d’air	187
7.2.3	La relation de dispersion d’un cristal photonique constitué de tiges de silicium entourées de SiO ₂	189
7.2.4	Conclusion	191
7.3	Etude numérique de la transmission à travers un cristal photonique “tas de bois”	191
7.4	Simulation numérique de l’inhibition de l’émission spontanée	193
7.4.1	Modélisation numérique de l’émission spontanée : le rayonnement du dipôle	194
7.4.2	Inhibition partielle de l’émission spontanée par un cristal photonique monodimensionnel	198
7.4.3	Inhibition de l’émission spontanée par un cristal photonique “tas de bois”	202
7.5	Conclusion	204
	Troisième partie : conclusion	207
	Conclusion générale	209
	Récapitulation des résultats obtenus	211
	Synthèse	213
	Perspectives	214
	Annexes	217
	A Preuve du lemme fondamental	219
	A.1 Preuve du lemme fondamental dans un cas particulier	219
	A.2 Preuve du lemme fondamental dans le cas général	224
	B Calcul de la limite des coefficients	227
	B.1 Calcul de la limite du coefficient de transmission	227
	B.2 Calcul de la limite du coefficient de réflexion	227
	B.3 Calcul de la limite du module carré du coefficient de transmission	229
	B.4 Calcul de la limite du module carré du coefficient de réflexion	231
	Bibliographie	233

Introduction générale

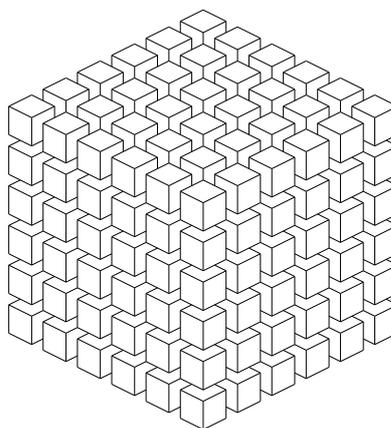
Cristal monodimensionnel :



Cristal bidimensionnel :



Cristal tridimensionnel :



En 1991, E. Yablonovitch a démontré expérimentalement la possibilité de réaliser une structure diélectrique périodique capable de réfléchir la totalité d'un rayonnement électromagnétique, quelle que soit la direction incidente, et dans certains intervalles de longueurs d'onde [1, 2] : ces intervalles de longueurs d'onde interdites sont désignés par le mot anglais *photonic bandgap*. Dans la suite de ce mémoire, ils seront plus brièvement désignés par le mot *gap*. Ce résultat, obtenu pour des longueurs d'onde centimétriques pour des raisons de commodités expérimentales, reste théoriquement valable si on effectue un même changement d'échelle sur la longueur d'onde du champ électromagnétique et sur les dimensions du cristal. La propriété mise en évidence par E. Yablonovitch devrait recevoir de nombreuses applications pour des longueurs d'onde de l'ordre du micromètre (longueurs d'onde correspondant à la lumière visible ou utilisées dans les télécommunications).

Intérêt des cristaux photoniques

Nous citons ici, parmi bien d'autres applications potentielles, deux propriétés des cristaux photoniques susceptibles de mener à des applications.

Les lasers à semi-conducteurs et les diodes électroluminescentes Un cristal photonique présentant un *gap* permettrait de contrôler l'émission spontanée en interdisant la propagation du rayonnement électromagnétique [3, 2]. L'interdiction totale de l'émission spontanée permettrait d'augmenter le rendement des lasers à semi-conducteurs (les lasers de loin les moins chers et les plus répandus). L'interdiction de l'émission spontanée dans certaines directions permettrait de canaliser l'énergie dans une direction bien précise. Ainsi, les diodes électroluminescentes fabriquées à partir de sources optiques de type solide (sources optiques bon marché) seraient plus performantes.

Les composants optiques Les cristaux photoniques peuvent se comporter comme des milieux homogènes à des longueurs d'ondes du même ordre de grandeur que la maille cristalline ; les caractéristiques des milieux homogènes équivalents sont inhabituelles, en particulier au bord des *gaps*. L'indice optique équivalent peut être inférieur à celui du vide et donner naissance à des phénomènes dits d'ultra-réfraction ; dans certaines circonstances, cet indice peut même devenir négatif. De plus, les milieux homogènes équivalents sont extrêmement dispersifs. Ces propriétés permettraient de séparer différentes longueurs d'onde avec un cristal dont les dimensions sont de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Les cristaux photoniques pourraient

permettre de fabriquer des démultiplexeurs de quelques micromètres et trouver des applications dans le domaine des télécommunications.

Les réalisations expérimentales de cristaux photoniques

Les longueurs d'onde présentes dans un *gap* sont du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques de la maille élémentaire du cristal. Ainsi, la fabrication de tels cristaux s'avère difficile pour les longueurs d'onde utiles de l'ordre du micromètre.

Pourtant, des cristaux photoniques de maille élémentaire micrométrique existent à l'état naturel. Les ailes des papillons de type *morpho* [4] ou *blumei* [5, 6] possèdent une structure proche de cristaux photoniques bidimensionnels. Les poils des vers marins de type *aphroditidae* ou *polychaeta* possèdent une structure proche d'un cristal bidimensionnel à maille hexagonale [7]. Enfin, les opales sont des cristaux photoniques tridimensionnels à maille cubique faces centrées [8]. Toutes ces structures réfléchissent la totalité du rayonnement électromagnétique dans certains intervalles de longueurs d'onde. Ces longueurs d'onde totalement réfléchies correspondent à la couleur de ces animaux et minéraux. Cependant, les propriétés de ces cristaux photoniques naturels ne coïncident pas avec celles recherchées : les intervalles de longueurs d'onde où il y a réflexion totale dépendent fortement de la direction incidente. Cette dépendance angulaire explique l'observation d'irisations (la couleur observée dépend de l'angle d'observation). Il semble aujourd'hui que seuls des cristaux artificiels sont susceptibles de présenter des *gaps* "totaux" (pour l'ensemble des incidences et des polarisations).

La technologie actuelle permet de fabriquer des cristaux photoniques bidimensionnels ou tridimensionnels de maille élémentaire de l'ordre du micromètre. Nous citons les deux procédés que nous pensons être les plus prometteurs.

Les cristaux photoniques de microsphères Le premier procédé consiste à réaliser une solution de microsphères dans un solvant dont les molécules sont de taille très inférieure à celle des microsphères [9] (ou solution colloïdale de microsphères) ; ces microsphères s'auto-assemblent sur un réseau cubique face centrée ou sur un réseau cubique centré. La disposition de ces microsphères est très proche de la configuration idéale. Seulement, ces cristaux photoniques fabriqués à partir de microsphères diélectriques ne présentent pas de *gap* omnidirectionnel pour les longueurs d'onde de l'ordre du micromètre : de telles structures exigent en effet un contraste d'indice diélectrique trop élevé (supérieur à 2.85 [10]). La recherche dans ce domaine s'est donc orientée vers la réalisation de cristaux photoniques de microsphères métalliques qui présentent le moins de pertes possible.

Les cristaux photoniques “tas de bois” Le second procédé consiste à déposer successivement des couches lamellaires fabriquées en utilisant les technologies développées pour les circuits intégrés à base de silicium [11, 12, 13]. Ces cristaux photoniques “tas de bois” (traduction française du mot anglais *woodpile*) présentent des *gaps* omnidirectionnels pour des longueurs d’onde allant jusqu’à 1.5 micromètres [12]. Ces cristaux photoniques présentent l’intérêt de posséder des pertes négligeables comparées à celle des cristaux photoniques de microsphères métalliques.

Choix du modèle

Le système physique étudié est constitué d’un cristal photonique et du rayonnement électromagnétique. Il est donc nécessaire de modéliser le cristal, le rayonnement électromagnétique et leur interaction. Les équations de Maxwell modélisent le rayonnement électromagnétique et l’interaction entre celui-ci et la matière considérée d’un point de vue macroscopique. La principale modélisation consiste à représenter le cristal photonique. Le cristal photonique est constitué de mailles élémentaires identiques situées sur un réseau. On rencontre deux solutions pour modéliser les cristaux photoniques.

Le cristal parfait La première solution envisagée pour modéliser le cristal est directement inspirée de la physique du solide [14] ; elle consiste à décrire le cristal par une structure périodique dans les trois directions de l’espace (cristal parfait). Cette approche permet de décrire fidèlement le comportement du rayonnement électromagnétique à l’intérieur du cristal ; en particulier, les *gaps* prédits par cette théorie coïncident avec les résultats expérimentaux [1, 2, 11]. Enfin, cette approche permet également de modéliser des structures comportant des défauts en utilisant la méthode dite de la “super-cellule” [15, 16].

Le cristal limité Le cristal est modélisé par une structure qui ne remplit pas tout l’espace. Une telle structure possède moins de symétries qu’une structure périodique dans les trois directions de l’espace. La résolution du problème s’avère par conséquent plus difficile. Néanmoins, cette approche permet de décrire fidèlement les propriétés de structures plus proches des réalisations expérimentales [17].

Actuellement, une méthode numérique rigoureuse permet de résoudre les équations de Maxwell en présence de cristaux photoniques bidimensionnels de forme arbitraire et constitués de tiges [18]. Nous citons les cas étudiés en détails : les cristaux photoniques comportant des défauts [19, 20], les fibres optiques en cristal photonique [21, 22], les lentilles et les prismes en cristal photonique [23].

Modèle choisi : l’empilement de réseaux Nous modélisons le cristal par une structure périodique dans deux directions de l’espace et limitée dans la troisième. Le cristal est un empilement de réseaux. Nous avons retenu ce modèle parce que nous pensons qu’il constitue un bon compromis entre le réalisme de la description et le

nombre de symétries. De plus, cette approche permet de profiter des connaissances acquises par la communauté de l'électromagnétisme en matière de réseaux.

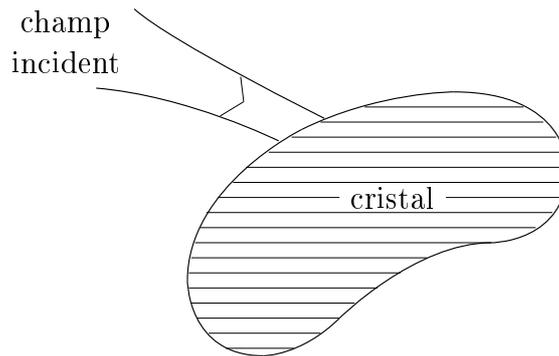
Objectifs de recherche

Cette thèse comporte les deux objectifs de recherche suivants.

Etude des propriétés de diffraction des cristaux photoniques de taille finie

Une grande part de cette thèse a été consacrée à l'étude de l'influence de la taille finie des cristaux photoniques. Nous pensons en effet que la prise en compte de la taille finie des cristaux photoniques est incontournable pour justifier certains phénomènes.

Pour déterminer cette influence, nous étudions le problème physique suivant. Soit un cristal photonique de taille finie éclairé par un champ électromagnétique incident : le problème consiste à déterminer le champ électromagnétique diffracté par le cristal. Nous caractérisons alors les propriétés du cristal de taille finie à partir des propriétés du champ électromagnétique diffracté.



La diffraction par un cristal photonique de taille finie.

En particulier, nous donnerons des éléments de réponses aux deux questions suivantes.

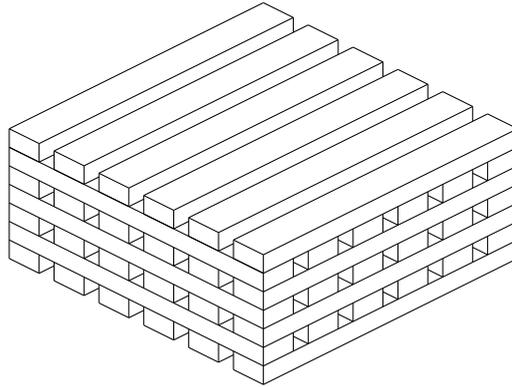
1.1 *Quelle est l'influence des interfaces qui séparent un cristal photonique de taille finie du milieu extérieur?*

1.2 *Dans quelle mesure les propriétés d'un cristal photonique de taille finie sont proches de celles d'un cristal photonique infini?*

Etude des propriétés des cristaux photoniques “tas de bois” Le second objectif de cette thèse a été de développer un code numérique permettant d'étudier les propriétés des cristaux photoniques “tas de bois” et, en particulier, le cristal photonique réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* [11, 12]. Les deux principales raisons qui nous ont amenés à favoriser ce type de structure sont les suivantes.

Premièrement, nous estimons que les cristaux photoniques “tas de bois” sont, avec les cristaux photoniques de microsphères, les structures à bandes photoniques les plus prometteuses.

Deuxièmement, contrairement aux cristaux photoniques de microsphères (pour lesquels il existe la méthode KKR [10]), il n’existe pas à notre connaissance de code numérique spécialement adapté à l’étude de ces structures “tas de bois” ; les codes numériques actuels reposent généralement sur la méthode utilisant la base de Fourier [24] (ou base des “ondes planes”) et souffrent des phénomènes de Gibbs [25].



Exemple de cristal photonique “tas de bois”.

Ce code numérique nous a permis de réaliser les trois objectifs suivants.

- 2.1 Déterminer avec précision la relation de dispersion dans un cristal photonique “tas de bois” parfait.*
- 2.2 Simuler numériquement l’expérience qui consiste à éclairer un cristal photonique “tas de bois” puis à déterminer la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise.*
- 2.3 Simuler numériquement la possibilité d’inhiber le phénomène de l’émission spontanée dans un cristal photonique “tas de bois”.*

Plan du mémoire

Comme l’indique le titre de cette thèse, le mémoire comporte des aspects théoriques et numériques. Les aspects théoriques sont concentrés dans l’étude des cristaux photoniques monodimensionnels ; la simplicité des équations permet dans ce cas d’estimer certaines propriétés analytiquement. Les aspects numériques sont concentrés dans l’étude des cristaux photoniques bi et tridimensionnels ; l’approche numérique nous a semblé indispensable dans ce cas.

Première partie La première partie est consacrée à l'étude théorique du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal parfait. Nous nous contentons de présenter synthétiquement des résultats déjà largement étudiés par la communauté des cristaux photoniques.

Nous présentons dans le chapitre 1 le raisonnement inspiré de la physique du solide qui, partant des équations de Maxwell dans un milieu périodique parfait, permet d'obtenir la relation de dispersion dans le cristal : cette relation de dispersion permet de déterminer les propriétés du cristal et, en particulier, les *gaps*.

Nous présentons dans le chapitre 2 quelques résultats sur le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal parfait : nous étudions le phénomène de l'émission spontanée et la trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal photonique parfait. Nous illustrerons numériquement ces phénomènes dans la troisième partie.

Les deux parties suivantes sont consacrées à l'étude du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal périodique dans deux directions de l'espace et limitée dans la troisième (ou empilement de réseaux).

Deuxième partie La deuxième partie est consacrée à l'étude théorique de la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel. Nous profitons de la simplicité des équations pour réaliser une étude détaillée de l'influence des interfaces planes qui séparent un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur ; nous complétons la présentation usuelle des propriétés des cristaux photoniques que nous avons réalisée dans la première partie.

Nous présentons dans le chapitre 3 la méthode que nous avons utilisée pour exprimer le champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie : nous utilisons la méthode des matrices de transfert.

Dans le chapitre 4, nous déterminons les propriétés de ce champ électromagnétique quand l'épaisseur du cristal photonique monodimensionnel tend vers l'infini (ce que nous appelons la limite thermodynamique). Nous donnons une interprétation physique simple du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur suffisamment grande : cette interprétation physique, inspirée de l'optique géométrique, rassemble l'ensemble de nos résultats. Enfin, nous illustrons numériquement tous nos résultats.

Troisième partie La troisième partie est consacrée à l'étude numérique des propriétés des cristaux photoniques. Cette troisième partie repose sur le code numérique que nous avons développé durant cette thèse : ce code numérique, spécialement adapté aux cristaux photoniques "tas de bois" nous a également permis d'étudier la diffraction par des cristaux photoniques mono et bidimensionnels.

Dans le chapitre 5, nous présentons les méthodes numériques que nous avons utilisées. Nous utilisons la méthode dite des "valeurs propres et fonctions propres exactes" pour développer le champ électromagnétique à l'intérieur de la structure "tas de bois". Surtout, nous présentons l'algorithme que nous avons élaboré pour déterminer la relation de dispersion d'un cristal à partir d'un code numérique de type "code réseau" ; nous entendons par "code réseau" un code numérique qui permet

d’obtenir la matrice de diffraction (ou matrice S) d’une structure périodique dans deux directions de l’espace et limitée dans la troisième.

Dans le chapitre 6, nous étudions numériquement l’influence d’interfaces quelconques qui séparent un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur : nous complétons l’étude théorique du chapitre 4. Nous établissons une règle qui permet d’estimer *a priori* l’influence de ces interfaces ; en associant cette règle avec le résultat théorique sur la trajectoire du champ électromagnétique établi dans le chapitre 2, nous mettons en évidence numériquement des phénomènes de réfraction inhabituels.

Enfin, dans le chapitre 7, nous utilisons notre code numérique pour étudier les cristaux photoniques “tas de bois”.

Mode d’emploi du mémoire

Notations Ce mémoire rassemble différentes études. Certains symboles seront utilisés plusieurs fois pour désigner des grandeurs différentes. C’est pourquoi nous avons décidé de définir précisément chaque symbole utilisé, quitte à alourdir la forme du mémoire.

Justification des résultats La première partie de ce mémoire utilise des notions de mathématiques qui se situent à la limite de nos connaissances personnelles : nous n’hésiterons pas à admettre certains résultats.

La deuxième partie de ce mémoire utilise des notions mathématiques plus simples. Nous avons souhaité justifier de façon détaillée les résultats de cette partie ; nous avons reporté les aspects les plus fastidieux en annexe.

La troisième partie de ce mémoire est essentiellement numérique. Nous ne manipulerons pas les objets mathématiques dans cette dernière partie avec autant de précautions que dans les deux précédentes : certains opérateurs deviendront des matrices. Dans ce cas, ce sont nos résultats numériques qui permettront de justifier nos développements théoriques.

Enfin, certains passages de ce mémoire sont imprimés en petits caractères et présentés comme ci-dessous.

Ces passages peuvent être ignorés en première lecture. Ils visent en général à préciser des détails ou à justifier des propriétés : leur lecture n’est pas indispensable à la compréhension générale du manuscrit.

Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivent les lois générales auxquelles obéit le rayonnement électromagnétique ainsi que son interaction avec la matière. Le rayonnement électromagnétique est représenté par quatre champs vectoriels E , H , D et B dépendants de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$ et du temps $t \in \mathbb{R}$. Ces quatre champs sont reliés à la densité de charge ρ et à la densité de courant J par les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho, & \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0, & \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} &= J. \end{aligned} \tag{1}$$

Ces équations de Maxwell (1) sont vraies au sens des distributions [26] : les quatre champs vectoriels E , H , D , B , la densité de charge ρ et la densité de courant J sont des formes linéaires continues agissant dans $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables, à support compact dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans \mathbb{C}^3 .

Les équations de Maxwell dans des matériaux diélectriques parfaits

Nous nous intéressons à des longueurs d'ondes se situant dans un intervalle allant du visible (quelques centaines de nanomètres) aux microondes. A ces échelles, la longueur d'onde recouvre au moins plusieurs milliers d'atomes : chaque matériau se comporte alors comme un milieu homogène. Nous supposons que la matière est exclusivement constituée de matériaux parfaits de type diélectrique : ces matériaux parfaits sont isotropes, isolants, linéaires, non-dispersifs et sans pertes. Leur caractère isolant exclut l'existence de charges libres et de courants : $\rho = 0$ et $J = 0$. Les quatre champs vectoriels E , H , D et B vérifient dans ce modèle les relations constitutives $D = \varepsilon E$ et $B = \mu H$, où ε est la permittivité et μ la perméabilité. Les équations de Maxwell (1) deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \varepsilon E &= 0, & \nabla \times E + \frac{\partial \mu H}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mu H &= 0, & \nabla \times H - \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Les équations de Maxwell harmoniques

Soit ω la pulsation du champ électromagnétique harmonique. Les champs électrique et magnétique sont alors représentés par les champs complexes E_ω et H_ω ne dépendant que de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$:

$$E = \Re[E_\omega \exp(-i\omega t)], \quad H = \Re[H_\omega \exp(-i\omega t)]. \quad (3)$$

Dorénavant, nous désignerons par fréquence (et non pas par pulsation) le réel ω . L'identité $\nabla \cdot \nabla \times = 0$ est vraie au sens des distributions. Alors, les équations de Maxwell vérifiées par les champs complexes E_ω et H_ω se réduisent à

$$\nabla \times E_\omega - i\omega\mu H_\omega = 0, \quad \nabla \times H_\omega + i\omega\varepsilon E_\omega = 0. \quad (4)$$

Hypothèses sur la permittivité et la perméabilité

Nous avons supposé que tous les matériaux sont non-dispersifs : la permittivité ε et la perméabilité μ sont indépendantes de la fréquence. Cette hypothèse devient inutile si le champ électromagnétique est harmonique (3). En effet, nous pouvons alors ajuster les valeurs des fonctions ε et μ selon la fréquence étudiée. Les fonctions ε et μ dépendent donc de la seule variable d'espace x .

$$\begin{aligned} \varepsilon : x &\longmapsto \varepsilon(x) \in \mathbb{R}. \\ \mu : x &\longmapsto \mu(x) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Les fonctions ε et μ à valeurs réelles représentent des matériaux sans pertes. Nous imposons une dernière condition peu restrictive : les fonctions ε et μ sont bornées supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^3 : 0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon_+ < \infty. \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 : 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Première partie

Propriétés des cristaux photoniques
parfaits

Première partie

Introduction

La méthode généralement utilisée pour étudier les structures cristallines consiste à modéliser le cristal par une structure périodique dans les trois directions de l'espace. En 1928, F. Bloch a introduit une méthode qui a permis de déterminer le comportement des électrons en présence d'un potentiel périodique. Cette méthode de Bloch fut ensuite développée mathématiquement par Floquet. Cette méthode fut largement validée expérimentalement ; elle permet en particulier de prédire la localisation des *gaps* et le comportement d'une source située dans un cristal photonique.

L'objectif de cette partie consiste à présenter quelques propriétés du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique parfait. Nous illustrerons ces propriétés par des exemples numériques dans les parties suivantes.

Dans le chapitre 1, nous utilisons l'analogie entre l'équation de Schrödinger et les équations de Maxwell (2). Cette formulation des équations de Maxwell résume le problème à l'étude du spectre d'un opérateur autoadjoint que nous appelons opérateur de Maxwell.

Dans le chapitre 2, nous établissons quelques propriétés physiques du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique parfait : nous étudions le phénomène de l'émission spontanée et la trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal photonique parfait. Nous relierons ces propriétés physiques au spectre de l'opérateur de Maxwell.

Nous présentons les propriétés des cristaux photoniques parfaits dans le cas idéal de matériaux non dispersifs et non absorbants (5). A. Tip a réalisé la généralisation de cette théorie aux matériaux diélectriques, dispersifs et absorbants [27]. Dans ce cas, la permittivité dépend de la fréquence ω et est à valeur complexe, et la perméabilité est égale à celle du vide μ_0 ; $\varepsilon : (x, \omega) \mapsto \varepsilon(x, \omega) \in \mathbb{C}$ et $\mu = \mu_0$. Cette étude a permis d'étendre la définition des *gaps* et de la densité d'états.

Enfin, A. Tip *et al.* ont réalisé une étude détaillée des *gaps* dans les cristaux photoniques absorbants [28]. Le spectre réel de l'opérateur de Maxwell sans absorption se prolonge analytiquement dans le plan complexe pour devenir le spectre de l'opérateur de Maxwell avec absorption ; les fréquences réelles associées aux solutions propagatives se prolongent en résonances (ou fréquences complexes). L'ensemble de

ces résonances forment des “bandes complexes” séparées par des “*gaps*”.

A. Tip *et al.* ont également répondu à la question fondamentale de l'émission spontanée en présence d'un cristal photonique absorbant : *les cristaux photoniques absorbants ne peuvent inhiber l'émission spontanée*. Bien que confirmant notre intuition, ce résultat peut sembler surprenant si nous considérons que les cristaux photoniques absorbants présentent néanmoins des “*gaps*”. L'interprétation physique de ce résultat est la suivante. Dans un cristal photonique non-absorbant, c'est l'existence de solutions propagatives qui permet à l'émission spontanée d'avoir lieu (l'énergie du photon émis peut ainsi être transférée à l'infini ou à une grande distance), tandis que la présence de *gaps* permet d'inhiber l'émission spontanée. Dans un cristal photonique absorbant, il est de plus possible de transférer de l'énergie à la matière environnante, et l'interprétation précédente est mise en défaut : la présence de *gaps* ne permet plus d'inhiber l'émission spontanée.

Néanmoins, l'étude théorique et numérique des cristaux photoniques absorbants est justifiée par le souci de décrire fidèlement les propriétés des cristaux photoniques réels qui, rigoureusement, sont toujours absorbants.

Chapitre 1

Le spectre de l'opérateur de Maxwell

Dans ce chapitre, nous nous inspirons de la méthode introduite par F. Bloch pour étudier les structures périodiques.

Nous commençons par définir le cristal photonique parfait. Nous précisons ensuite l'ensemble dans lequel nous cherchons les solutions des équations de Maxwell. Nous pourrions alors définir l'opérateur de Maxwell et donner la solution des équations de Maxwell ; l'évolution de cette solution est entièrement déterminée par l'opérateur de Maxwell.

La suite de ce chapitre est donc consacrée à l'étude de l'opérateur de Maxwell. Cet opérateur est autoadjoint ; la connaissance de son spectre permet de décrire ses propriétés et, par conséquent, les propriétés des solutions des équations de Maxwell. L'opérateur de Maxwell possède la périodicité du cristal. Il admet alors une décomposition de Floquet-Bloch et l'étude de son spectre se trouve donc simplifiée. Nous énoncerons le théorème de Bloch qui résume les conséquences physiques de cette décomposition. Enfin, nous présenterons la décomposition de Floquet de l'opérateur de Maxwell et ses conséquences.

1.1 Description du cristal photonique parfait

Le cristal parfait est une structure périodique dans les trois directions de l'espace. Soient d_1, d_2 et d_3 trois translations élémentaires non coplanaires du cristal. La maille élémentaire du cristal est le parallélépipède V engendré par les trois translations élémentaires d_1, d_2 et d_3 :

$$V = \{x = x_1 d_1 + x_2 d_2 + x_3 d_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]\}. \quad (1.1)$$

Le volume $|V|$ de la maille élémentaire est $|V| = (d_1 \times d_2) \cdot d_3 \neq 0$. Le réseau de Bravais Γ associé au cristal est l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 de coordonnées entières dans la base (d_1, d_2, d_3) .

$$\Gamma = \{\gamma = \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.2)$$

Nous avons représenté sur la figure 1.1 un exemple de réseau bidimensionnel. La base réciproque (d_1^*, d_2^*, d_3^*) est définie telle que $d_i \cdot d_j^* = 2\pi \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$d_1^* = (2\pi/|V|) d_2 \times d_3, \quad d_2^* = (2\pi/|V|) d_3 \times d_1, \quad d_3^* = (2\pi/|V|) d_1 \times d_2. \quad (1.3)$$

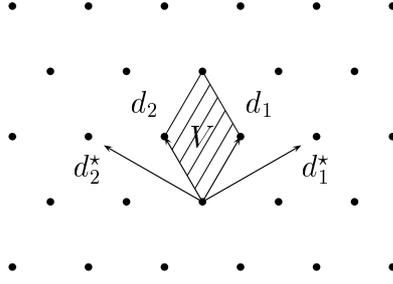


FIG. 1.1: Exemple de réseau bidimensionnel : le réseau hexagonal. Nous avons représenté les deux translations élémentaires d_1 et d_2 , la maille élémentaire V du cristal (surface hachurée) et les deux vecteurs d_1^* et d_2^* de la base réciproque.

Dans cette première partie, le cristal photonique est un cristal parfait ; la permittivité ε et la perméabilité μ qui caractérisent les propriétés de la matière sont des fonctions Γ -périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \gamma \in \Gamma : \varepsilon(x + \gamma) = \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \mu(x + \gamma) = \mu(x). \quad (1.4)$$

1.2 Les solutions des équations de Maxwell d'énergie finie

Nous avons introduit les équations de Maxwell au sens des distributions dans le chapitre préliminaire. L'ensemble des distributions comprend des fonctions E et H qui ne sont pas acceptables physiquement. Nous donc imposons des conditions aux fonctions E et H : nous considérons des champs électromagnétiques d'énergie finie.

Soit F le vecteur comprenant les deux fonctions E et H représentant les champs électrique et magnétique.

$$F = (E, H). \quad (1.5)$$

L'expression de l'énergie totale $\mathcal{E}_F(t)$ du champ électromagnétique représenté par $F = (E, H)$ est

$$\mathcal{E}_F(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |E(t, x)|^2 \varepsilon(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |H(t, x)|^2 \mu(x) dx. \quad (1.6)$$

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert des couples de fonction F représentant des champs électromagnétiques d'énergie finie : $F \in \mathcal{H} \iff \mathcal{E}_F(t) < \infty$. Nous choisissons \mathcal{H} afin que le carré de la norme d'un élément F coïncide avec l'énergie totale $\mathcal{E}_F(t)$.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\varepsilon \oplus \mathcal{H}_\mu \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_\nu = L^2(\mathbb{R}^3, \nu dx; \mathbb{C}^3) \quad \forall \nu = \varepsilon, \mu. \quad (1.7)$$

L'ensemble $\mathcal{H}_\nu = L^2(\mathbb{R}^3, \nu dx; \mathbb{C}^3)$ est l'espace des fonctions de carré sommable de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{C}^3 . Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ le produit scalaire dans \mathcal{H}_ν .

$$\forall G, G' \in L^2(\mathbb{R}^3, \nu dx; \mathbb{C}^3) : \langle G, G' \rangle_\nu = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{G(x)} \cdot G'(x) \nu(x) dx, \quad (1.8)$$

où $\overline{G(x)}$ est le complexe conjugué de $G(x)$. D'après l'hypothèse (6), les fonctions ε et μ sont strictement positives ; cette hypothèse assure que les ensembles \mathcal{H}_ε et \mathcal{H}_μ sont des espaces de Hilbert. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ le produit scalaire dans \mathcal{H} . D'après (1.7),

$$\forall F = (E, H), F' = (E', H') \in \mathcal{H} : \langle F, F' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle E, E' \rangle_\varepsilon + \langle H, H' \rangle_\mu. \quad (1.9)$$

Nous avons introduit les poids ε et μ dans le produit scalaire (1.9) afin que le carré de la norme d'un élément $F \in \mathcal{H}$ coïncide avec l'énergie du champ électromagnétique qu'il représente.

$$\forall F \in \mathcal{H} : \|F\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle F, F \rangle_{\mathcal{H}} = 2\mathcal{E}_F(t). \quad (1.10)$$

D'après (6), la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ induite par le produit scalaire (1.9) est équivalente à la norme sans poids. Cette propriété inciterait à supprimer les poids dans le produit scalaire (1.9). Cependant, nous conservons ces poids puisque leur présence va s'avérer indispensable dans l'étude des équations de Maxwell.

En résumé, nous cherchons des solutions des équations de Maxwell d'énergie finie : l'ensemble des champs électromagnétiques d'énergie finie est l'espace de Hilbert \mathcal{H} (1.7).

1.3 Définition de l'opérateur de Maxwell

Dans cette section, nous exprimons les équations de Maxwell de la même façon que l'équation de Schrödinger. Nous définirons alors l'opérateur de Maxwell qui joue le même rôle dans les équations de Maxwell que l'hamiltonien dans l'équation de Schrödinger.

Les équations de Maxwell (2) dans l'ensemble des couples de fonctions d'énergie finie s'écrivent

$$i \frac{\partial F}{\partial t} = \mathbb{M}F \quad \text{avec} \quad F \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}F = 0, \quad (1.11)$$

où

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0 & i\varepsilon^{-1}\nabla \times \\ -i\mu^{-1}\nabla \times & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \varepsilon & 0 \\ 0 & \nabla \cdot \mu \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Les opérateurs divergence $\nabla \cdot$ et rotationnel $\nabla \times$ opèrent au sens des distributions dans l'équation (1.11). D'après l'hypothèse (6), les fonctions ε et μ sont inversibles ; l'expression (1.12) de l'opérateur \mathbb{M} ne pose pas de problèmes.

Nous qualifions de “transverse” tout couple de fonctions $F = (E, H)$ vérifiant $\mathbb{D}F = 0 \iff \nabla \cdot \varepsilon E = 0$ et $\nabla \cdot \mu H = 0$. Soit \mathcal{H}^\perp le sous espace de \mathcal{H} ne contenant que les couples de fonctions “transverses”.

$$\mathcal{H}^\perp = \{F \in \mathcal{H} \mid \mathbb{D}F = 0\}. \quad (1.13)$$

Cet espace \mathcal{H}^\perp est un sous espace fermé de l’espace de Hilbert \mathcal{H} . L’espace \mathcal{H}^\perp muni du produit scalaire (1.9) est donc lui-même un espace de Hilbert. L’identité $\nabla \cdot \nabla \times = 0$ est vraie au sens des distributions. Nous en déduisons que les opérateurs \mathbb{D} et \mathbb{M} vérifient $\mathbb{D}\mathbb{M} = 0$. L’image de l’opérateur \mathbb{M} est donc contenue dans l’espace \mathcal{H}^\perp . Nous pouvons alors faire agir l’opérateur \mathbb{M} dans l’espace de Hilbert \mathcal{H}^\perp et l’équation de Maxwell (1.11) se réduit à l’équation d’évolution

$$i \frac{\partial F}{\partial t} = \mathbb{M}F \quad \text{avec} \quad F \in \mathcal{H}^\perp. \quad (1.14)$$

Enfin, l’opérateur \mathbb{M} est non borné. Nous devons préciser son domaine $\mathcal{D}(\mathbb{M}) = \{F \in \mathcal{H}^\perp \mid \mathbb{M}F \in \mathcal{H}^\perp\}$. D’après la définition (1.12) de \mathbb{M} ,

$$\mathcal{D}(\mathbb{M}) = \{F = (E, H) \in \mathcal{H}^\perp \mid \nabla \times E, \nabla \times H \in L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)\}. \quad (1.15)$$

Nous pouvons maintenant définir l’opérateur de Maxwell et montrer que cet opérateur est autoadjoint dans \mathcal{H}^\perp .

Définition 1.1 *Nous appelons opérateur de Maxwell l’opérateur \mathbb{M} d’expression (1.12) agissant dans l’espace de Hilbert \mathcal{H}^\perp (1.13) et de domaine $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ (1.15).*

Propriété 1.1 *L’opérateur \mathbb{M} de domaine $\mathcal{D}(\mathbb{M})$ est autoadjoint dans \mathcal{H}^\perp .*

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^* \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}^\perp. \quad (1.16)$$

Preuve de la propriété 1.1 Nous procédons en deux étapes; nous commençons par montrer que \mathbb{M} est symétrique ($\mathbb{M} \subset \mathbb{M}^*$) puis nous montrons que le domaine de son adjoint \mathbb{M}^* est inclus dans le domaine de \mathbb{M} ($\mathcal{D}(\mathbb{M}^*) \subset \mathcal{D}(\mathbb{M})$). Ces deux relations impliquent que l’opérateur \mathbb{M} est autoadjoint : $\mathbb{M} = \mathbb{M}^*$.

Première étape *L’opérateur \mathbb{M} est symétrique; pour tout $F, F' \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$: $\langle F, \mathbb{M}F' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathbb{M}F, F' \rangle_{\mathcal{H}}$. Soient $F = (E, H)$ et $F' = (E', H') \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$. D’après la définition (1.9) du produit scalaire dans \mathcal{H} et l’expression (1.12) de \mathbb{M} ,*

$$\begin{aligned} \langle F, \mathbb{M}F' \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle E, i\varepsilon^{-1} \nabla \times H' \rangle_\varepsilon + \langle H, -i\mu^{-1} \nabla \times E' \rangle_\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{E(x)} \cdot (i \nabla \times H')(x) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{H(x)} \cdot (-i \nabla \times E')(x) dx. \end{aligned}$$

D’après la définition (1.15) de $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, $E, H, \nabla \times E'$ et $\nabla \times H'$ sont des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)$. Alors, nous pouvons leur appliquer une transformation de Fourier. Soit \widehat{G} la transformée de Fourier de G pour tout élément $G \in L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)$. Alors, d’après l’unitarité de la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)$,

$$\begin{aligned} \langle F, \mathbb{M}F' \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\widehat{E}(k)} \cdot (-k) \times \widehat{H}'(k) dk + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\widehat{H}(k)} \cdot (+k) \times \widehat{E}'(k) dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (+k) \times \overline{\widehat{E}(k)} \cdot \widehat{H}'(k) dk + \int_{\mathbb{R}^3} (-k) \times \overline{\widehat{H}(k)} \cdot \widehat{E}'(k) dk. \end{aligned}$$

D'après la définition (1.15) de $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, E' , H' , $\nabla \times E$ et $\nabla \times H$ sont également des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)$. Alors, d'après l'unitarité de la transformation de Fourier inverse dans $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)$,

$$\begin{aligned} \langle F, \mathbb{M}F' \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}^3} \overline{(-i\nabla \times E)(x)} \cdot H'(x) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \overline{(i\nabla \times H)(x)} \cdot E'(x) dx \\ &= \langle -i\mu^{-1}\nabla \times E, H' \rangle_{\mu} + \langle i\varepsilon^{-1}\nabla \times H, E' \rangle_{\varepsilon} = \langle \mathbb{M}F, F' \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

D'après cette dernière égalité, l'opérateur \mathbb{M} est symétrique : $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}^*$.

Seconde étape *Le domaine de \mathbb{M}^* est inclus dans le domaine de \mathbb{M} .* Soit $F = (E, H) \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^*)$. D'après la définition de l'adjoint, il existe $F' = (E', H') \in \mathcal{H}^{\perp}$ tel que $\langle F, \mathbb{M}F'' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F', F'' \rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $F'' \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$. En particulier, nous pouvons écrire cette égalité pour tout F'' infiniment dérivable et à support compact de \mathcal{H}^{\perp} ; pour tout $F'' = (E'', H'') \in (C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3) \oplus C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)) \cap \mathcal{H}^{\perp}$,

$$\langle E, i\varepsilon^{-1}\nabla \times H'' \rangle_{\varepsilon} + \langle H, -i\mu^{-1}\nabla \times E'' \rangle_{\mu} = \langle E', E'' \rangle_{\varepsilon} + \langle H', H'' \rangle_{\mu}.$$

Cette dernière relation implique les égalités $i\varepsilon^{-1}\nabla \times E = H'$ et $-i\mu^{-1}\nabla \times H = E'$ au sens des distributions. Alors, de même que H' et E' , $\nabla \times E$ et $\nabla \times H$ sont des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3, dx; \mathbb{C}^3)$: d'après la définition (1.15) de $\mathcal{D}(\mathbb{M})$, $F \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \implies \mathcal{D}(\mathbb{M}^*) \subset \mathcal{D}(\mathbb{M})$.

Conclusion Nous avons montré dans cette section que les équations de Maxwell dans l'ensemble des champs électromagnétiques d'énergie finie se résument à l'équation d'évolution (1.14) dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}^{\perp} . Cette équation d'évolution fait intervenir l'opérateur (autoadjoint) de Maxwell.

1.4 Solution des équations de Maxwell

Pour résoudre l'équation d'évolution (1.14), nous utilisons le théorème VIII.7 de [29, section VIII.4]. L'opérateur de Maxwell étant autoadjoint (propriété 1.1), l'équation d'évolution (1.14) a pour solution

$$\forall t \in \mathbb{R} : F(t) = \exp(-i\mathbb{M}t)F(0) \quad \text{avec} \quad F(0) \in \mathcal{D}(\mathbb{M}). \quad (1.17)$$

L'opérateur $\exp(-i\mathbb{M}t)$ est unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$ [29, section VIII.4]. La première conséquence est l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy constitué des équations de Maxwell et de la condition initiale $F(0) \in \mathcal{D}(\mathbb{M})$. La deuxième conséquence est la conservation de l'énergie électromagnétique (1.6) au cours du temps. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$2\mathcal{E}_F(t) = \|F(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\exp(-i\mathbb{M}t)F(0)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|F(0)\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\mathcal{E}_F(0). \quad (1.18)$$

La généralisation de cette solution de l'équation d'évolution à des matériaux dispersifs et absorbants est réalisée dans [27].

A ce stade, l'attitude consiste à étudier l'opérateur de Maxwell qui, d'après (1.17), détermine les solutions $F(t)$ des équations de Maxwell (1.14).

L'opérateur de Maxwell est autoadjoint; la connaissance de son spectre permet de décrire ses propriétés et, par conséquent, les propriétés des solutions (1.17). En effet,

supposons que la fréquence ω soit une valeur propre de \mathbb{M} et que F_ω soit le vecteur propre associé : $\mathbb{M}F_\omega = \omega F_\omega$. Alors, d'après (1.17), le vecteur $F_\omega(t) = \exp(-i\omega t)F_\omega$ est une solution harmonique des équations de Maxwell. Nous comprenons alors que les fréquences du spectre de l'opérateur de Maxwell sont aussi les fréquences dites "permises" dans le cristal photonique.

Les sections suivantes de ce chapitre sont donc consacrées à l'étude du spectre de l'opérateur de Maxwell.

1.5 Le spectre de l'opérateur de Maxwell

Soit $\sigma(\mathbb{M})$ le spectre de l'opérateur \mathbb{M} .

$$\sigma(\mathbb{M}) = \{ \omega \in \mathbb{C} \mid (\omega\mathbb{I} - \mathbb{M}) \text{ n'est pas une bijection de } \mathcal{D}(\mathbb{M}) \text{ dans } \mathcal{H}^\perp \}, \quad (1.19)$$

où \mathbb{I} est l'identité dans \mathcal{H}^\perp . L'opérateur de Maxwell étant autoadjoint, son spectre $\sigma(\mathbb{M})$ est inclus dans \mathbb{R} :

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^* \implies \sigma(\mathbb{M}) \subset \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Les fréquences ω admises (les éléments de $\sigma(\mathbb{M})$) sont réelles ; le champ électromagnétique n'est pas atténué au cours du temps. Cette propriété est directement reliée à la conservation de l'énergie au cours du temps (1.18). Ces résultats ne sont pas surprenants puisque nous ne considérons que des matériaux sans absorption. Dans le cas de matériaux avec absorption [28], les fréquences admises sont complexes et le champ électromagnétique est atténué au cours du temps : l'énergie électromagnétique est absorbée par la matière.

La suite de cette section est consacrée à l'étude de l'opérateur \mathbb{M}^2 . D'après l'expression (1.12) de \mathbb{M} ,

$$\mathbb{M}^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}\nabla \times \mu^{-1}\nabla \times & 0 \\ 0 & \mu^{-1}\nabla \times \varepsilon^{-1}\nabla \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_E & 0 \\ 0 & M_H \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

C'est l'opérateur \mathbb{M}^2 qui est généralement étudié dans l'étude des cristaux photoniques. En effet, l'étude du spectre de l'opérateur \mathbb{M}^2 se réduit à l'étude du spectre de sa restriction aux champs électriques M_E ou de sa restriction aux champs magnétiques M_H : ces deux restrictions agissent dans des espaces deux fois plus petits (\mathcal{H}_ε ou \mathcal{H}_μ) que l'opérateur \mathbb{M} . La suite de cette section consiste donc à exprimer le spectre de \mathbb{M} à partir du spectre de M_E ou de M_H . L'opérateur \mathbb{M}^2 est autoadjoint et positif dans \mathcal{H}^\perp :

$$\mathbb{M}^2 = (\mathbb{M}^2)^* \quad \text{et} \quad \langle F, \mathbb{M}^2 F \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall F \in \text{domaine de } \mathbb{M}^2. \quad (1.22)$$

Nous pouvons montrer ces propriétés de \mathbb{M}^2 en utilisant les résultats établis dans [29, section VIII.6] appliqués à la forme quadratique

$$q : \forall F, F' \in \mathcal{D}(M) \longmapsto q(F, F') = \langle \mathbb{M}F, \mathbb{M}F' \rangle_{\mathcal{H}}.$$

La propriété (1.22) de \mathbb{M}^2 implique que les éléments ω^2 de son spectre $\sigma(\mathbb{M}^2)$ sont des réels positifs.

$$(1.22) \implies \sigma(\mathbb{M}^2) \subset [0, +\infty[. \quad (1.23)$$

Il est montré dans [30] que le spectre de \mathbb{M} est symétrique: $\sigma(\mathbb{M}) = -\sigma(\mathbb{M})$. Si une fréquence ω est dans le spectre de \mathbb{M} alors la fréquence $-\omega$ est aussi dans le spectre de \mathbb{M} . Alors, d'après la relation entre \mathbb{M}^2 et \mathbb{M} , si ω^2 est dans le spectre de \mathbb{M}^2 , les fréquences ω et $-\omega$ sont dans le spectre de \mathbb{M} .

$$\sigma(\mathbb{M}) = \{ \pm \omega \mid \omega^2 \in \sigma(\mathbb{M}^2) \} \quad (1.24)$$

D'après (1.21), l'opérateur \mathbb{M}^2 est constitué des deux opérateurs découplés M_E et M_H . Alors, le spectre de l'opérateur \mathbb{M}^2 est l'union des spectres de M_E et M_H : $\sigma(\mathbb{M}^2) = \sigma(M_E) \cup \sigma(M_H)$. Il est montré dans [30] que les opérateurs M_E et M_H sont unitairement équivalents. Ces deux opérateurs ont donc le même spectre: $\sigma(M_E) = \sigma(M_H)$. Alors, les trois opérateurs \mathbb{M}^2 , M_E et M_H ont le même spectre et l'expression (1.24) du spectre de \mathbb{M} devient

$$\sigma(\mathbb{M}) = \{ \pm \omega \mid \omega^2 \in \sigma(M_E) \} = \{ \pm \omega \mid \omega^2 \in \sigma(M_H) \}. \quad (1.25)$$

L'équivalence entre les deux opérateurs M_E et M_H n'est pas étonnante. En effet, d'après les équations de Maxwell (2), la fonction E représentant le champ électrique s'exprime linéairement à partir de la fonction H représentant le champ magnétique et réciproquement.

Conclusion D'après (1.25), le spectre de l'opérateur de Maxwell \mathbb{M} s'exprime à partir du spectre de l'opérateur M_E ou du spectre de l'opérateur M_H . Le problème se résume donc à l'étude du spectre des opérateurs autoadjoints et positifs M_E et M_H . En général, la perméabilité μ est égale à la perméabilité du vide μ_0 . C'est pourquoi c'est souvent l'opérateur M_H qui est choisi puisque, si $\mu = \mu_0$, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ (1.8) de \mathcal{H}_μ devient le produit scalaire usuel. Le problème est donc généralement réduit à l'étude du spectre de l'opérateur

$$M_H = \mu^{-1} \nabla \times \varepsilon^{-1} \nabla \times \quad (1.26)$$

autoadjoint et positif dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_\mu^\perp = \{ H \in \mathcal{H}_\mu \mid \nabla \cdot \mu H = 0 \}. \quad (1.27)$$

L'étude du spectre de l'opérateur M_H repose sur la périodicité du cristal. Les fonctions ε et μ étant Γ -périodiques, l'opérateur M_H est lui-même Γ -périodique; l'opérateur M_H admet une décomposition dite de "Floquet-Bloch" et l'étude de son spectre se trouve alors simplifiée. Les conséquences physiques de cette décomposition furent découvertes par F. Bloch et le fondement mathématique fut introduit par Floquet.

Les deux dernières sections de ce chapitre 1 sont donc consacrées au théorème de Bloch puis à la décomposition de Floquet.

1.6 Le théorème de Bloch : les conséquences physiques des symétries

Le théorème de Bloch est la conséquence physique de la Γ -périodicité (1.4) du cristal. Le cristal Γ -périodique est invariant si on lui applique toute translation d'un vecteur γ du réseau Γ : ces translations sont des symétries. L'étude des conséquences des symétries nécessite en toute rigueur l'emploi de la théorie des groupes [31, section XIII.16] (dans notre cas, il est nécessaire de considérer le groupe des translations discrètes d'un vecteur $\gamma \in \Gamma$ qui laissent le cristal parfait invariant). Nous nous contentons de reproduire dans cette section 1.6 la justification usuelle (en physique) des conséquences des symétries. Une présentation générale des conséquences physiques des symétries est réalisée dans le livre de J. Joannopoulos *et al.* [14, chapitre 3].

Le théorème de Bloch établit que la Γ -périodicité du cristal impose une forme particulière aux vecteurs propres de l'opérateur M_H : ces vecteurs propres sont des fonctions de Bloch. Ensuite, nous discuterons des conséquences du théorème de Bloch ; nous pensons que ces conséquences du théorème de Bloch permettent d'introduire la décomposition de Floquet que nous aborderons dans la section suivante.

Justification du théorème de Bloch Le cristal étant Γ -périodique, il est invariant si nous lui appliquons une translation d'un vecteur γ du réseau Γ . Soit $\{T_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ l'ensemble des opérateurs associés à ces translations agissant dans \mathcal{H}_μ^\perp .

$$\forall H \in \mathcal{H}_\mu^\perp : (T_\gamma H)(x) = H(x + \gamma) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \gamma \in \Gamma. \quad (1.28)$$

L'étude de ces translations T_γ permet de préciser la forme générale des vecteurs propres de l'opérateur M_H . En effet, l'opérateur M_H étant Γ -périodique, il "commute" avec l'ensemble des translations $\{T_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$: $T_\gamma M_H = M_H T_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Les vecteurs propres de l'opérateur M_H sont donc aussi des vecteurs propres de l'ensemble des translations $\{T_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. L'intérêt de cette démarche est que les vecteurs propres des opérateurs associés aux symétries sont simples à déterminer. Les vecteurs propres communs à l'ensemble des translations $\{T_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ sont des fonctions de Bloch que nous définissons ci-après.

Définition des fonctions de Bloch Nous considérons des fonctions de Bloch localement de carré sommable : ces fonctions localement de carré sommable décrivent des champs d'énergie localement finie. Soit V^* la maille élémentaire du réseau réciproque engendrée par les trois vecteurs d_1^* , d_2^* et d_3^* de la base réciproque (1.3).

$$V^* = \{k = k_1 d_1^* + k_2 d_2^* + k_3 d_3^* \in \mathbb{R}^3 \mid k_1, k_2, k_3 \in [-1/2, 1/2]\}. \quad (1.29)$$

Soit $L_\#^2(V, \mu dx; \mathbb{C}^3)$ l'espace de Hilbert des fonctions Γ -périodiques, localement de carré sommable de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{C}^3 et muni du produit scalaire

$$(G, G') \longmapsto \int_V \overline{G(x)} \cdot G'(x) \mu(x) dx. \quad (1.30)$$

Nous définissons alors pour tout $k \in V^*$ l'ensemble

$$\mathcal{H}_\mu^\perp(k) = \left\{ H_k : x \longmapsto \exp(ik \cdot x) H_\#(x) \mid \nabla \cdot \mu H_k = 0, H_\# \in L_\#^2(V, \mu dx; \mathbb{C}^3) \right\}. \quad (1.31)$$

Nous appelons fonctions de Bloch les éléments de cet ensemble (1.31). Ces fonctions de Bloch sont les vecteurs propres communs à l'ensemble des translations $\{T_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ [14, chapitre 3].

Le théorème de Bloch *Les vecteurs propres de l'opérateur Γ -périodique M_H sont nécessairement des éléments de l'ensemble des fonctions de Bloch $\{\mathcal{H}_\mu^\perp(k) \mid k \in V^*\}$.*

Nous remarquons immédiatement que l'intersection entre l'ensemble des fonctions de Bloch $\{\mathcal{H}_\mu^\perp(k) \mid k \in V^*\}$ et \mathcal{H}_μ^\perp est réduit à la fonction nulle (une fonction à la fois périodique et sommable est nécessairement nulle). Le théorème de Bloch implique donc que l'opérateur M_H ne possède pas de vecteur propre dans \mathcal{H}_μ^\perp . Autrement dit, il n'existe pas de solution harmonique d'énergie finie dans un cristal parfait.

Néanmoins, le théorème de Bloch nous indique la forme des “faux vecteurs propres” de l'opérateur M_H : nous entendons par “faux vecteur propre” un vecteur propre de M_H qui n'appartient pas à \mathcal{H}_μ^\perp mais qui appartient à l'ensemble des fonctions de Bloch. Ces “faux vecteurs propres” H_k , associés à de “fausses valeurs propres” ω_k^2 , définissent des “fausses solutions harmoniques” $H_k \exp(\pm i\omega_k t)$ de l'équation $-\partial^2 H / \partial t^2 = M_H H$. On peut utiliser ces “fausses solutions harmoniques” d'énergie infinie pour en construire des superpositions (ou paquets) H d'énergie finie qui appartiennent à \mathcal{H}_μ^\perp et qui sont solutions de l'équation $-\partial^2 H / \partial t^2 = M_H H$: nous utiliserons cette méthode pour construire des solutions des équations de Maxwell dans le chapitre 2. Ce raisonnement heuristique nous indique que les “fausses valeurs propres” sont vraisemblablement des éléments du spectre de l'opérateur M_H agissant dans \mathcal{H}_μ^\perp .

Conclusion Le théorème de Bloch nous indique que les “faux vecteurs propres” de l'opérateur M_H sont des éléments de l'ensemble des fonctions de Bloch $\{\mathcal{H}_\mu^\perp(k) \mid k \in V^*\}$. Les “fausses valeurs propres” associés à ces “faux vecteurs propres” sont vraisemblablement des éléments du spectre de l'opérateur M_H agissant dans \mathcal{H}_μ^\perp . L'objectif de la section suivante consiste à préciser les conséquences des symétries sur le spectre de l'opérateur de Maxwell.

1.7 La théorie de Floquet : décomposition de l'opérateur de Maxwell

L'opérateur M_H étant Γ -périodique, il admet une décomposition de Floquet ou décomposition intégrale [31, section XIII.16]. La conséquence principale de cette décomposition est que le spectre de l'opérateur M_H agissant dans \mathcal{H}_μ^\perp est l'union

des spectres des opérateurs M_H agissant dans les espaces $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$, $k \in V^*$; ce résultat permet de décomposer le problème principal en une famille de problèmes plus simples.

Une étude générale de la décomposition intégrale des opérateurs autoadjoints (en particulier l'équation de Schrödinger avec potentiel périodique) est réalisée dans [31, section XIII.16]. Une étude détaillée de la décomposition de l'opérateur de Maxwell bidimensionnel est réalisée dans [32, 30]: ces dernières publications font souvent référence à l'ouvrage de P. Kuchment sur la théorie de Floquet [33] pour plus de détails.

Dans cette section, nous commençons par introduire la transformation de Floquet-Bloch qui permet de représenter de façon unique tout élément de \mathcal{H}_μ^\perp comme la superposition (ou paquet) de fonctions de Bloch ou éléments de $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$, $k \in V^*$. Cette transformation permet donc de construire une vraie solution (d'énergie finie) à partir des "faux vecteurs propres" (d'énergie infinie). Ensuite, nous faisons agir l'opérateur M_H dans l'ensemble des espaces $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$, $k \in V^*$: ainsi, nous obtenons les "fausses valeurs propres" de l'opérateur M_H . Finalement, c'est un résultat issu de la théorie de Floquet qui nous assure que l'ensemble de ces "fausses valeurs propres" constitue le spectre de l'opérateur M_H .

1.7.1 La transformation de Floquet-Bloch

Soit $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables et à support compact de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{C}^3 . Nous pouvons définir la transformation de Floquet-Bloch \mathcal{U} pour toute fonction $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}_\mu^\perp$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall k \in V^* : (\mathcal{U}G)(x, k) = |V|^{1/2} \sum_{\gamma \in \Gamma} G(x + \gamma) \exp(-ik \cdot \gamma). \quad (1.32)$$

Pour tout k fixé $\in V^*$, la fonction $(\mathcal{U}G)(\cdot, k)$ définie par (1.32) est un élément de l'ensemble $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$. Plus précisément,

$$\mathcal{U}G \in L^2(V^*, dk; \mathcal{H}_\mu^\perp(k)). \quad (1.33)$$

La transformation de Floquet-Bloch, que nous avons définie par (1.32) sur l'ensemble $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}_\mu^\perp$ dense dans \mathcal{H}_μ^\perp , s'étend en une unique isométrie de \mathcal{H}_μ^\perp dans $L^2(V^*, dk; \mathcal{H}_\mu^\perp(k))$ [33]. Nous pouvons donner l'expression de la transformation de Floquet-Bloch inverse \mathcal{U}^{-1} pour toute fonction $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3) \cap \mathcal{H}_\mu^\perp$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : [\mathcal{U}^{-1}(\mathcal{U}G)](x) = |V|^{1/2} / (2\pi)^3 \int_{V^*} (\mathcal{U}G)(x, k) dk. \quad (1.34)$$

Conclusion La transformation de Floquet-Bloch inverse \mathcal{U}^{-1} permet de représenter de façon unique toute fonction de carré sommable sur \mathbb{R}^3 par un paquet de fonctions de Bloch localement de carré sommable. La transformation de Floquet-Bloch est l'analogue de la transformation de Fourier qui permet de représenter de façon unique toute fonction de carré sommable par un paquet d'ondes planes.

1.7.2 Les conséquences de la décomposition de Floquet

Nous admettons les résultats que nous énonçons dans cette section 1.7.2. Les démonstrations de ces résultats dans des cas analogues sont données dans [32, 30] et dans [31, section XIII.16].

L'opérateur M_H étant Γ -périodique, il peut agir dans un espace $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$; pour tout $k \in V^*$, nous notons $M_H(k)$ l'opérateur dont l'expression est donnée par (1.26) et qui agit dans $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$. De même que l'opérateur M_H dans \mathcal{H}_μ^\perp , chaque opérateur $M_H(k)$ est autoadjoint et positif dans $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$. L'étude de l'opérateur M_H conduit à l'étude de la famille d'opérateurs $\{M_H(k) \mid k \in V^*\}$: c'est la décomposition de Floquet de l'opérateur M_H . Cette décomposition de l'opérateur périodique M_H est une conséquence de la transformation de Floquet-Bloch \mathcal{U} . En effet, c'est la transformation de Floquet-Bloch \mathcal{U} qui permet de décomposer l'espace \mathcal{H}_μ^\perp en une famille d'espaces $\{\mathcal{H}_\mu^\perp(k) \mid k \in V^*\}$.

La conséquence fondamentale de la décomposition de Floquet-Bloch de l'opérateur M_H est que son spectre est la réunion des spectres des $M_H(k)$ [32, 30]:

$$\sigma(M_H) = \bigcup_{k \in V^*} \sigma(M_H(k)). \quad (1.35)$$

Les opérateurs $M_H(k)$ agissent sur des fonctions du domaine borné V avec des conditions de Bloch à la frontière de V (rigoureusement, ces opérateurs sont à résolvante compacte). Alors, chacun des spectres $\sigma(M_H(k))$ est constitué de valeurs propres réelles et positives (figure 1.2). Soit, pour tout $k \in V^*$, $\{\omega_{k,n}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des

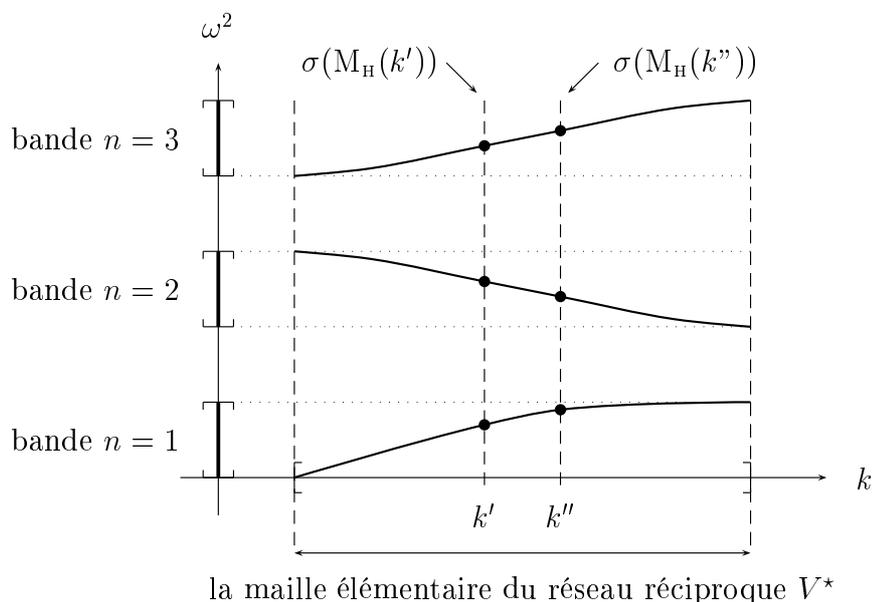


FIG. 1.2: Décomposition de l'opérateur M_H . Nous avons représenté schématiquement les trois premières bandes du spectre de M_H et les trois premières valeurs propres du spectre de $M_H(k')$ et $M_H(k'')$.

valeurs propres de l'opérateur $M_H(k)$ classées par ordre croissant. Alors, d'après la relation (1.35), le spectre de l'opérateur M_H est

$$\sigma(M_H) = \{\omega_{k,n}^2 \mid k \in V^*, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.36)$$

Le spectre de M_H est un ensemble de bandes continues séparées par des *gaps* (figure 1.2). La $n^{\text{ième}}$ bande est constituée de l'ensemble des $n^{\text{ièmes}}$ valeurs propres de chaque opérateur $M_H(k)$: la $n^{\text{ième}}$ bande est donc le volume décrit par $\omega_n(k)$ lorsque le vecteur k parcourt la maille élémentaire du réseau réciproque V^* . D'après (1.25), nous pouvons exprimer le spectre de l'opérateur de Maxwell à partir du spectre de M_H (1.36):

$$\sigma(\mathbb{M}) = \{\pm\omega_{k,n} \mid k \in V^*, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.37)$$

Enfin, nous définissons la relation de dispersion qui permet d'exprimer la fréquence ω à partir du vecteur k dans chaque bande.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \omega_n(k) = \sqrt{\omega_{k,n}^2} \quad \forall k \in V^*. \quad (1.38)$$

Dans la suite, nous ne ferons plus apparaître l'indice de bande n dans la relation de dispersion afin d'alléger les notations: nous notons la relation de dispersion (1.38) $\omega(k)$.

1.7.3 Conclusion

La théorie de Floquet permet de réduire le problème principal, la recherche du spectre de l'opérateur Γ -périodique M_H , en une famille de problèmes élémentaires indexée par le paramètre k (le paramètre k décrit la maille élémentaire du réseau réciproque V^*). Chaque problème élémentaire consiste à déterminer le spectre de l'opérateur $M_H(k)$. Le résultat fondamental (1.35) de cette section est que le spectre de l'opérateur M_H est la réunion des spectres des opérateurs $M_H(k)$. Le spectre de chacun des opérateurs $M_H(k)$ est constitué de valeurs propres. La recherche de ces valeurs propres s'avère plus simple que la recherche directe du spectre de l'opérateur M_H . En particulier, les méthodes numériques sont bien adaptées à la recherche de valeurs propres.

1.8 Conclusion

Nous avons donné l'expression générale (1.17) de la solution des équations de Maxwell d'énergie finie. Cette expression fait intervenir l'opérateur de Maxwell \mathbb{M} que nous avons défini dans la section 1.3. L'opérateur de Maxwell étant autoadjoint, la connaissance de son spectre permet de décrire ses propriétés et, par conséquent, les propriétés des solutions des équations de Maxwell. La Γ -périodicité du cristal simplifie la recherche du spectre de l'opérateur de Maxwell. Le théorème de Bloch et la théorie de Floquet permettent de décomposer l'opérateur de Maxwell: la recherche du spectre de l'opérateur \mathbb{M} se ramène à la recherche des valeurs propres de l'ensemble des opérateurs $\{M_H(k) \mid k \in V^*\}$.

A ce stade, l'étude des propriétés des solutions des équations de Maxwell se résume donc à la recherche des valeurs propres de l'ensemble des opérateurs $\{M_H(k) \mid k \in V^*\}$.

L'approche mathématique a permis de montrer l'existence de *gaps* dans le spectre de l'opérateur de Maxwell pour des cristaux photoniques bidimensionnels particuliers : ces cristaux photoniques sont constitués de colonnes d'air carrées situées sur un réseau carré dans un milieu homogène possédant un fort indice diélectrique [34, 32]. Cette étude donne également une expression analytique de la localisation de ces *gaps*. Mis à part ce cas particulier, l'approche numérique est nécessaire pour déterminer le spectre de l'opérateur de Maxwell pour des cristaux photoniques bi et tridimensionnels.

La méthode numérique la plus répandue est la méthode des ondes planes [24, 14]. Cette méthode consiste à exprimer chaque opérateur $M_H(k)$ dans la base de Fourier (ou base des ondes planes) puis à déterminer les valeurs propres de l'opérateur tronqué. La méthode des ondes planes est souple mais peu performante. Nous entendons par souple le fait que la méthode des ondes planes permet de résoudre toutes les géométries périodiques. En contrepartie, la méthode des ondes planes converge lentement [25] vers la solution exacte et, par conséquent, nécessite des moyens de calcul importants.

C'est pourquoi A. Moroz a adapté la méthode de Korringa-Kohn-Rostocker [35, 36] (ou méthode KKR) aux équations de Maxwell [37] (cette méthode est aussi appelée méthode de Rayleigh [38]). La méthode KKR consiste à faire interagir un ensemble de diffuseurs placés dans un milieu homogène (dans le cas d'un cristal photonique, tous les diffuseurs sont identiques et situés sur un site du réseau Γ). La méthode KKR utilise la matrice de diffraction du diffuseur développée sur la base des harmoniques sphériques. Ainsi, pour que la méthode soit valide, chaque diffuseur doit être inscrit dans une sphère disjointe des sphères entourant les autres diffuseurs [37]. Ainsi, A. Moroz a déterminé avec précision les *gaps* pour des cristaux photoniques constitués de sphères diélectriques [10] et métalliques [39].

Nous déterminerons le spectre de l'opérateur de Maxwell dans des cas particuliers dans les deuxième et troisième parties.

Dans le chapitre 2, nous supposons que nous connaissons le spectre de l'opérateur de Maxwell. L'objectif du chapitre 2 consiste à relier le spectre de l'opérateur de Maxwell au comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique parfait.

Chapitre 2

Comportement du champ électromagnétique dans un cristal parfait

Dans ce chapitre, nous établissons quelques propriétés physiques du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique parfait. Nous examinons en particulier deux propriétés qui sont susceptibles de mener à des applications : nous étudions le phénomène de l'émission spontanée et la trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal parfait. Nous relierons ces propriétés au spectre de l'opérateur de Maxwell que nous avons étudié au chapitre 1.

Les cristaux photoniques ont été introduits parce qu'ils permettraient de contrôler l'émission spontanée [3, 2]. Nous examinerons donc le phénomène de l'émission spontanée dans un cristal photonique parfait. Nous montrerons que l'émission spontanée d'un photon d'énergie $\hbar\omega$ est théoriquement inhibée si la fréquence ω appartient à un *gap* présent dans le spectre de l'opérateur de Maxwell. Nous examinerons plus précisément le taux différentiel d'émission spontanée dans un certain angle solide. Nous pourrions alors étudier la possibilité de canaliser l'émission spontanée dans un angle solide.

Enfin, nous étudierons la trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal photonique parfait. Nous établirons dans un cadre restreint des analogies entre un cristal photonique et un milieu homogène où la trajectoire du champ électromagnétique est déterminée par la vitesse de groupe. Cette étude de la trajectoire du champ électromagnétique nécessitera de construire des solutions des équations de Maxwell d'énergie finie. Nous construirons en particulier des solutions dont les propriétés sont proches de celles de fonctions harmoniques. Nous verrons alors que la trajectoire du champ électromagnétique peut être décrite très simplement.

2.1 Le contrôle de l'émission spontanée

Dans cette section nous présentons le phénomène de l'émission spontanée. Ce phénomène est purement quantique : sa description nécessite une modélisation quantique de la matière et du champ électromagnétique. La quantification du champ électromagnétique dans un milieu non homogène et son application à l'émission spontanée en présence d'un cristal photonique sont présentées dans [40].

Nous nous efforçons de décrire un système quantique permettant d'estimer qualitativement le taux différentiel d'émission spontanée dans un certain angle solide. Nous adapterons au mieux les résultats rigoureux établis par A. Tip dans [40] pour obtenir un modèle qui nous permettra d'utiliser directement les résultats établis par C. Cohen-Tannoudji *et al.* dans [41, chapitre XIII] : ces résultats permettent d'estimer l'évolution d'un système quantique constitué d'un continuum d'états en interaction avec d'un couple d'états discrets.

Nous définirons à partir du spectre de l'opérateur de Maxwell la densité d'état qui caractérise le champ électromagnétique quantifié en présence du cristal parfait. Nous pourrons alors énoncer la règle d'or de Fermi et l'estimation de Weisskopf et Wigner qui permettent d'exprimer le taux différentiel d'émission spontanée à partir de la densité d'état [41, chapitre XIII]. Ces estimations nous permettront de montrer comment un cristal photonique peut théoriquement permettre d'inhiber ou de canaliser dans un angle solide étroit l'émission spontanée.

2.1.1 Le modèle quantique

Un atome dans un état excité est susceptible de se désexciter spontanément en émettant un photon spontané. Durant ce processus, le système atome-champ électromagnétique passe de l'état initial "atome à l'état excité dans le vide" à l'état final "atome dans l'état fondamental et un photon". Nous allons décrire un système quantique constitué d'un atome et du champ électromagnétique qui permet de modéliser ce phénomène de l'émission spontanée et qui nous permettra d'utiliser les résultats établis dans [41, chapitre XIII]. Nous allons successivement décrire l'hamiltonien de l'atome, l'hamiltonien du champ électromagnétique, l'hamiltonien du système atome-champ électromagnétique découplé, l'hamiltonien d'interaction atome-champ électromagnétique puis l'évolution du système.

L'hamiltonien de l'atome Soit $H^{(1)}$ l'hamiltonien de l'atome. Si l'atome est constitué d'un noyau très lourd situé en x_0 et d'un électron de charge $-e$ et de masse m , l'hamiltonien de l'atome est $H^{(1)} = -\hbar^2 \Delta / (2m) + V_{coul}$, où V_{coul} est le potentiel coulombien que subit l'électron. Nous supposons que l'hamiltonien $H^{(1)}$ possède deux états propres orthogonaux non dégénérés $|\psi_a^{(1)}\rangle$ et $|\psi_b^{(1)}\rangle$ d'énergies $\mathcal{E}_a > \mathcal{E}_b$.

$$H^{(1)}|\psi_a^{(1)}\rangle = \mathcal{E}_a|\psi_a^{(1)}\rangle \quad \text{et} \quad H^{(1)}|\psi_b^{(1)}\rangle = \mathcal{E}_b|\psi_b^{(1)}\rangle. \quad (2.1)$$

Nous pouvons restreindre l'hamiltonien $H^{(1)}$ au sous-espace engendré par ces deux vecteurs propres. Soit $P^{(1)}$ la projection sur ce sous-espace.

$$P^{(1)} = |\psi_a^{(1)}\rangle\langle\psi_a^{(1)}| + |\psi_b^{(1)}\rangle\langle\psi_b^{(1)}|. \quad (2.2)$$

L'hamiltonien du champ électromagnétique Soit $H^{(2)}$ l'hamiltonien du champ électromagnétique. L'expression générale de cet hamiltonien quantifié est donnée dans [40]. Cette expression fait intervenir les opérateurs de création et d'annihilation qui agissent dans l'espace de Fock [40, annexe B]. Surtout, chaque composante de l'espace de Fock est stable sous l'action de ce hamiltonien quantifié : cet hamiltonien peut donc être décomposé en une somme directe. Dans notre modèle, nous ne considérons que les états du champ électromagnétique à un seul photon. Alors, dans notre modèle, nous ne gardons que la restriction du hamiltonien quantifié à la composante des états à un seul photon de l'espace de Fock. D'après [40, annexe B], cette restriction est

$$H^{(2)} = \hbar\sqrt{M_E}, \quad (2.3)$$

où $\sqrt{M_E}$ est l'unique opérateur autoadjoint et positif vérifiant $\sqrt{M_E}\sqrt{M_E}E = M_E E$ pour tout $E \in \mathcal{D}(M_E)$ (théorème VIII.32 de [29, section VIII.9]). L'ensemble des "faux vecteurs propres" de l'opérateur M_E est interprété comme un continuum d'états propres du hamiltonien $H^{(2)}$. Soient $|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle$ les états propres du hamiltonien $H^{(2)}$ d'énergie $\hbar\omega$, $\omega \geq 0$:

$$H^{(2)}|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle = \hbar\omega|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle \quad \forall \omega, \alpha. \quad (2.4)$$

Le nombre α détermine les dégénérescences de l'énergie $\hbar\omega$. Les états propres $|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle$ sont orthogonaux (puisque $\sqrt{M_E}$ est autoadjoint) mais ils ne sont pas d'énergie finie (ce sont des "faux vecteurs propres") ; ils vérifient la relation d'orthogonalité

$$\langle\psi_{\omega',\alpha'}^{(2)}|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle = \delta(\omega - \omega')\delta(\alpha - \alpha') \quad \forall \omega, \alpha, \omega', \alpha', \quad (2.5)$$

où δ est la "fonction" de Dirac. Alors, l'hamiltonien $H^{(2)}$ se développe comme une série de projections sur ses états propres

$$H^{(2)} = \sum_{\alpha} \int \hbar\omega|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle\langle\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}| d\omega, \quad (2.6)$$

où la somme sur les dégénérescences α est éventuellement continue (la somme devient alors une intégrale). Soit $P^{(2)}$ la projection sur l'image du hamiltonien $H^{(2)}$: $H^{(2)} = P^{(2)}H^{(2)}P^{(2)}$. Cette projection $P^{(2)}$ est aussi l'identité dans l'espace engendré par les fonctions propres du hamiltonien $H^{(2)}$. D'après (2.6),

$$P^{(2)} = \sum_{\alpha} \int |\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle\langle\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}| d\omega. \quad (2.7)$$

L'hamiltonien du système atome-champ électromagnétique découplé Durant le processus de l'émission spontanée, le système atome-champ électromagnétique passe de l'état initial $|\psi_i\rangle = |\psi_a^{(1)}\rangle \otimes |\psi_{vide}^{(2)}\rangle$ "atome à l'état excité dans le vide" à un état final $|\psi_{\omega,\alpha}\rangle = |\psi_b^{(1)}\rangle \otimes |\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle$ "atome dans son état fondamental et un photon d'énergie $\hbar\omega$ ". Soit $H^{(0)} = P^{(1)}H^{(1)}P^{(1)} \otimes P^{(2)} + P^{(1)} \otimes P^{(2)}H^{(2)}P^{(2)}$ l'hamiltonien du système constitué de l'atome et du champ électromagnétique découplés. Alors, les états $|\psi_i\rangle$ et $|\psi_{\omega,\alpha}\rangle$ sont des états propres de $H^{(0)}$:

$$H^{(0)}|\psi_i\rangle = \mathcal{E}_i|\psi_i\rangle \quad \text{et} \quad H^{(0)}|\psi_{\omega,\alpha}\rangle = \mathcal{E}_\omega|\psi_{\omega,\alpha}\rangle \quad \forall \omega, \alpha, \quad (2.8)$$

où $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_b + \hbar\omega$. Nous pouvons restreindre le hamiltonien $H^{(0)}$ à l'espace \mathcal{H}_0 engendré par le vecteur $|\psi_i\rangle$ et l'ensemble des vecteurs $|\psi_{\omega,\alpha}\rangle$. Soit $P^{(0)}$ la projection sur \mathcal{H}_0 . D'après (2.7),

$$P^{(0)} = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + \sum_{\alpha} \int |\psi_{\omega,\alpha}\rangle\langle\psi_{\omega,\alpha}| d\omega. \quad (2.9)$$

Nous considérons que l'hamiltonien du système atome-champ électromagnétique découplé est H_0 , l'opérateur qui coïncide avec $P^{(0)}H^{(0)}$ sur \mathcal{H}_0 et nul sur l'orthogonal de \mathcal{H}_0 .

$$H_0 = P^{(0)}H^{(0)}P^{(0)}. \quad (2.10)$$

L'hamiltonien d'interaction Soit H_i le hamiltonien d'interaction qui couple l'atome et le champ électromagnétique. En jauge de Coulomb l'hamiltonien d'interaction entre l'atome et le champ électromagnétique est $H_i = -i(e\hbar/m)\nabla \cdot \mathbf{A}(x_0) + e^2 A^2(x_0)/(2m)$, où $\mathbf{A}(x_0)$ est le potentiel vecteur en x_0 . Cette expression du hamiltonien d'interaction reste valable dans un milieu non homogène en adoptant la jauge de Coulomb généralisée [40]. Nous avons utilisé l'approximation usuelle des "grandes longueurs d'onde". En effet, la longueur d'onde du champ électromagnétique recouvre plusieurs milliers d'atomes. Alors, le champ électromagnétique est quasiment constant sur l'étendue de l'atome : nous pouvons remplacer le potentiel vecteur par sa valeur à la position x_0 du noyau. Nous supposons que H_i est indépendant du temps. Nous supposons de plus que H_i se contente de coupler l'état ψ_i aux états $\psi_{\omega,\alpha}$:

$$\langle\psi_i|H_i|\psi_i\rangle = \langle\psi_{\omega,\alpha}|H_i|\psi_{\omega',\alpha'}\rangle = 0 \quad \forall \omega, \alpha, \omega', \alpha'. \quad (2.11)$$

Cette hypothèse (2.11) consiste à négliger le deuxième terme du hamiltonien d'interaction : $H_i \sim -i(e\hbar/m)\nabla \cdot \mathbf{A}$. Enfin, nous supposons que nous pouvons restreindre H_i à \mathcal{H}_0 (autrement dit les états à zéro ou un photon) ; cette dernière hypothèse est une hypothèse forte puisqu'elle est en contradiction avec l'expression du potentiel vecteur \mathbf{A} en seconde quantification donnée dans [40]. En effet, de même que le potentiel vecteur \mathbf{A} couple l'état à zéro photon (le vide) aux états à un photon, le potentiel vecteur \mathbf{A} couple les états à un photon aux états à deux photons.

Enfin, la dépendance spatiale du potentiel vecteur \mathbf{A} , donnée dans [40], est directement reliée à la dépendance spatiale des états propres du hamiltonien du champ électromagnétique. Alors, d'après l'expression de H_i , les coefficients $\langle\psi_i|H_i|\psi_{\omega,\alpha}\rangle$ vérifient la propriété suivante.

Propriété 2.1 D'après l'expression du potentiel vecteur donnée dans [40], chaque coefficient $\langle \psi_i | H_i | \psi_{\omega, \alpha} \rangle$ est d'autant plus grand que la valeur de chaque état propre $|\psi_{\omega, \alpha}^{(2)}\rangle$ en x_0 est grande.

L'équation de Schrödinger L'état du système est décrit par la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction d'onde vérifie à l'instant initial $|\psi(0)\rangle = |\psi_i\rangle$ et son évolution est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_i) |\psi(t)\rangle. \quad (2.12)$$

Conclusion Nous avons présenté un modèle qui permet de décrire l'émission spontanée. Ce modèle permet d'utiliser les résultats établis dans [41, chapitre XIII]. L'expression de l'identité dans \mathcal{H}_0 coïncide avec l'expression (2.9) de $P^{(0)}$ dans \mathcal{H}_0 : cette relation est donc la relation dite de fermeture dans \mathcal{H}_0 [41, chapitre XIII].

Dans la section suivante nous définissons la densité d'états qui permettra de préciser l'expression (2.9) de la relation de fermeture.

2.1.2 Définition de la densité d'état

Dans cette section nous définissons la densité d'état par unité de fréquence et par unité d'angle solide.

D'après (2.3), les états propres du hamiltonien $H^{(2)}$ coïncident avec les fonctions propres des opérateurs $M_E(k)$, $k \in V^*$. Alors, d'après (1.37, 1.25) un état propre du hamiltonien $H^{(2)}$ est déterminé par le vecteur $k \in V^*$, et l'indice de bande $n \in \mathbb{N}$. Le nombre d'états étant homogène dans l'espace des vecteurs k , la projection (2.7) sur les états propres de $H^{(2)}$ s'écrit précisément

$$P^{(2)} = \int_{V^*} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\psi_{\omega_{k,n}}^{(2)}\rangle \langle \psi_{\omega_{k,n}}^{(2)}| dk. \quad (2.13)$$

La suite de cette section consiste à réaliser un changement de variable dans l'expression ci-dessus. La distribution homogène des états de (2.13) deviendra alors une distribution pondérée par une densité d'état.

Pour simplifier, nous oublions volontairement les dégénérescences de polarisation ; à une énergie $\hbar\omega$ et un vecteur $k \in V^*$ correspond au plus un état du champ électromagnétique. La fréquence ω et le vecteur k étant reliés par la relation de dispersion (1.38), un état est complètement déterminé par son énergie $\hbar\omega$ et deux paramètres du vecteur k . Nous choisissons de caractériser un état du champ électromagnétique par son énergie $\hbar\omega$ et la direction du vecteur k . Le nombre α contient la direction du vecteur $k = (|k|, \theta, \phi) \in V^*$:

$$\alpha = (\theta, \phi) \in \Omega_\alpha = [0, \pi] \times [0, 2\pi[. \quad (2.14)$$

Dans la suite de cette section, nous définissons ρ , la densité d'état par unité de fréquence et par unité d'angle solide.

Nous commençons par définir pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega \geq 0$, $\alpha \in \Omega_\alpha$, l'ensemble

$$\Omega_{n,\omega,\alpha} = \{|k| \geq 0 \mid k = (|k|, \alpha) \in V^* \text{ et } \omega_{k,n}^2 \in \sigma(M_E(k)) \cap [0, \omega^2]\}. \quad (2.15)$$

Cet ensemble $\Omega_{n,\omega,\alpha}$ détermine l'ensemble des états de la $n^{\text{ième}}$ bande, d'énergie inférieure à $\hbar\omega$, et qui se propagent dans la direction α . Le nombre d'états contenus dans cet ensemble $\Omega_{n,\omega,\alpha}$ est proportionnel à son volume

$$|\Omega_{n,\omega,\alpha}| = \int_{\Omega_{n,\omega,\alpha}} |k|^2 d\alpha dk = d\alpha \int_{\Omega_{n,\omega,\alpha}} |k|^2 dk,$$

où $d\alpha = \sin\theta d\theta d\phi$. Alors, le nombre d'états par unité d'angle solide, d'énergie inférieure à $\hbar\omega$, et qui se propagent dans la direction α est

$$N(\omega, \alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega_{n,\omega,\alpha}} |k|^2 dk. \quad (2.16)$$

Soit $\rho(\omega, \alpha)$ la densité d'état d'énergie $\hbar\omega$ et se propageant dans la direction α par unité de fréquence et par unité d'angle solide. La densité d'état $\rho(\omega, \alpha)$ est reliée au nombre d'états $N(\omega, \alpha)$ par

$$N(\omega, \alpha) = \int_0^\omega \rho(\omega', \alpha) d\omega'.$$

D'où l'expression de la densité d'état en fonction du nombre d'états par unité d'angle solide

$$\rho(\omega, \alpha) = \lim_{d\omega \rightarrow 0} \frac{N(\omega + d\omega, \alpha) - N(\omega, \alpha)}{d\omega}. \quad (2.17)$$

Conclusion Nous avons donné l'expression (2.17) de ρ , la densité d'état par unité de fréquence et par unité d'angle solide. Alors, l'expression (2.13) de $P^{(2)}$ devient

$$P^{(2)} = \int |\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle \langle \psi_{\omega,\alpha}^{(2)}| \rho(\omega, \alpha) d\omega d\alpha. \quad (2.18)$$

Nous pouvons maintenant préciser la relation de fermeture (2.9) utilisée dans [41, chapitre XIII]. Soit I_0 l'identité dans \mathcal{H}_0 .

$$I_0 = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| + \int |\psi_{\omega,\alpha}\rangle \langle \psi_{\omega,\alpha}| \rho(\omega, \alpha) d\alpha. \quad (2.19)$$

La densité d'état permet de rendre compte du domaine sur lequel porte l'intégrale dans la relation de fermeture (2.19). En effet, par construction,

$$\rho(\omega, \alpha) \neq 0 \iff \exists |k| \text{ tel que } \omega \in \sigma(M_E(|k|, \alpha)). \quad (2.20)$$

En particulier, il est simple de vérifier que si ω est une fréquence d'un *gap* de l'opérateur de Maxwell, alors la densité d'état $\rho(\omega, \alpha)$ est nulle pour tout $\alpha \in \Omega_\alpha$. L'intégrale qui intervient dans la relation de fermeture (2.19) porte donc sur l'ensemble des couples (ω, α) pour lesquels la densité d'état $\rho(\omega, \alpha)$ est non-nulle.

2.1.3 Comportement aux temps courts : la règle d'or de Fermi

La règle d'or de Fermi est une estimation aux temps courts de la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ qui décrit le système. Cette estimation permet en particulier de donner le taux de départ Γ_{sp} de l'état initial $|\psi_i\rangle$. Toute transition se traduit par l'apparition d'un photon spontané : le taux de départ peut donc s'interpréter comme un taux d'émission spontanée. Nous avons présenté un modèle qui permet d'utiliser directement le résultat établi dans [41, chapitre XIII]. Ce résultat repose sur une résolution approchée de l'équation de Schrödinger (2.12) : nous commençons donc par donner le domaine de validité de la règle d'or de Fermi.

Domaine de validité de la règle d'or de Fermi Le résultat que nous utilisons repose sur une estimation au premier ordre des perturbations de la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$. L'estimation est donc valable pour les temps t suffisamment courts qui vérifient

$$|\langle \psi_{\omega,\alpha} | H_i | \psi_i \rangle| t / \hbar \ll 1 \quad \forall \omega, \alpha. \quad (2.21)$$

Le résultat repose sur une deuxième approximation qui suppose que le produit des coefficients du hamiltonien d'interaction avec la densité d'état, $|\langle \psi_{\omega,\alpha} | H_i | \psi_i \rangle|^2 \times \rho(\omega, \alpha)$, soit une fonction de la fréquence ω lentement variable par rapport à la fonction $\omega \mapsto \omega t$. Si la densité d'état et les coefficients du hamiltonien d'interaction varient sensiblement à une échelle de $(\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b) / \hbar$, alors le résultat que nous utilisons n'est valable que pour les temps t suffisamment longs qui vérifient

$$t \gg \hbar / (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b). \quad (2.22)$$

La règle d'or de Fermi Soit ω_{ab} la fréquence associée à la différence d'énergie entre les deux états atomiques $|\psi_a^{(1)}\rangle$ et $|\psi_b^{(1)}\rangle$.

$$\omega_{ab} = (\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b) / \hbar. \quad (2.23)$$

Alors, la probabilité $P_i(t)$ de trouver, à l'instant t vérifiant les hypothèses (2.21, 2.22), le système dans l'état $|\psi_i\rangle$ est

$$P_i(t) = |\langle \psi_i | \psi(t) \rangle|^2 = 1 - \Gamma_{sp} t, \quad (2.24)$$

où Γ_{sp} est le taux d'émission spontanée défini à partir du taux différentiel d'émission spontanée $\Gamma_{sp}(\alpha)$:

$$\Gamma_{sp} = \int \Gamma_{sp}(\alpha) d\alpha \quad \text{avec} \quad \Gamma_{sp}(\alpha) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |\langle \psi_{\omega_{ab},\alpha} | H_i | \psi_i \rangle|^2 \rho(\omega_{ab}, \alpha) \quad \forall \alpha. \quad (2.25)$$

La probabilité d'avoir le système dans l'état $|\psi_i\rangle$ décroît linéairement avec le temps avec une pente opposée au taux d'émission spontanée Γ_{sp} . Le taux différentiel d'émission spontanée $\Gamma_{sp}(\alpha)$ est lui directement proportionnel à la densité d'état $\rho(\omega_{ab}, \alpha)$ (règle d'or de Fermi). Ainsi, si la densité d'état $\rho(\omega_{ab}, \alpha)$ est nulle pour tout α , le

taux d'émission spontanée est nul et la probabilité $P_i(t)$ reste égale à 1 : l'atome reste dans l'état excité et il n'y a pas d'émission spontanée. Autrement dit, si la fréquence ω_{ab} est dans un *gap* du spectre de l'opérateur de Maxwell, la probabilité $P_i(t)$ reste égale à 1 et l'émission spontanée est inhibée.

$$\omega_{ab} \in [0, +\infty[\setminus \sigma(\mathbb{M}) \implies \Gamma_{sp} = 0. \quad (2.26)$$

Nous n'avons pas fait apparaître la dépendance en x_0 du taux d'émission spontanée Γ_{sp} . Le taux d'émission spontanée Γ_{sp} dépend de la position de la source x_0 par l'intermédiaire du hamiltonien d'interaction. Nous pouvons donner qualitativement le comportement du taux d'émission spontanée en fonction de la position de la source x_0 . D'après la propriété 2.1 vérifiée par les coefficients du hamiltonien d'interaction et l'expression (2.25) du taux d'émission spontané, ce dernier est d'autant plus grand que la valeur des états propres $|\psi_{\omega,\alpha}^{(2)}\rangle$ en x_0 est grande. Une estimation quantitative de la dépendance en x_0 du taux d'émission spontanée est réalisée dans [40] : *le taux global d'émission spontanée est proportionnel à la densité d'état locale*.

Enfin, nous pouvons maintenant préciser la compatibilité des deux conditions (2.21) et (2.22). D'après (2.25), la condition (2.21) peut se résumer à $t \ll \Gamma_{sp}^{-1}$. Alors, le domaine de validité de la règle d'or de Fermi peut se résumer à

$$\omega_{ab}^{-1} \ll t \ll \Gamma_{sp}^{-1}. \quad (2.27)$$

Ce domaine de validité (2.27) de la règle d'or de Fermi est trop restreint pour pouvoir décrire l'évolution du système pour des temps longs et, en particulier, pour pouvoir décrire l'état final du processus. C'est la méthode de Weisskopf et Wigner qui permet d'estimer l'état final du système.

2.1.4 Comportement aux temps longs : la méthode de Weisskopf et Wigner

La méthode de Weisskopf et Wigner permet de résoudre approximativement l'équation de Schrödinger (2.12) lorsque le temps t tend vers l'infini. Cette méthode permet en particulier de décrire l'état final du processus de l'émission spontanée. De même que pour la règle d'or de Fermi, nous allons directement utiliser des résultats établis dans [41, complément D_{XIII}]. Ces résultats sont les suivants.

Domaine de validité de la méthode de Weisskopf et Wigner De même que la règle d'or de Fermi, la méthode de Weisskopf et Wigner suppose que le produit des coefficients du hamiltonien d'interaction avec la densité d'état, $|\langle \psi_{\omega,\alpha} | H_i | \psi_i \rangle|^2 \times \rho(\omega, \alpha)$, soit une fonction de la fréquence ω lentement variable par rapport à la fonction $\omega \mapsto \omega t$. Alors la méthode de Weisskopf et Wigner n'est valable que pour les temps t suffisamment longs qui vérifient la condition (2.22) : aucune limite supérieure n'est imposée au temps t . Nous pouvons alors toujours trouver un domaine de validité de cette méthode. En particulier, l'expression de l'état final entre toujours dans le domaine de validité.

Comportement aux temps longs de l'état du système La solution de l'équation de Schrödinger (2.12) lorsque le temps t tend vers l'infini est approximativement

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-\Gamma_{sp} t/2) \exp(-i\Delta\mathcal{E}t/\hbar) |\psi_i\rangle + \int \frac{\langle\psi_{\omega,\alpha}|\mathbf{H}_i|\psi_i\rangle \exp(-i\mathcal{E}_{\omega}t/\hbar)}{\hbar(\omega - \omega_{ab}) - \Delta\mathcal{E} + i\hbar\Gamma_{sp}/2} |\psi_{\omega,\alpha}\rangle \rho(\omega, \alpha) d\omega d\alpha, \quad (2.28)$$

avec

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{P} \int \hbar^{-1}(\omega_{ab} - \omega)^{-1} \left[\int |\langle\psi_{\omega,\alpha}|\mathbf{H}_i|\psi_i\rangle|^2 \rho(\omega, \alpha) d\alpha \right] d\omega,$$

où le symbole \mathcal{P} signifie que la première intégrale est au sens de Cauchy. Cette solution (2.28) nous permet de donner l'expression de la probabilité $P_i(t)$ pour les temps longs.

$$P_i(t) = \exp[-\Gamma_{sp} t]. \quad (2.29)$$

Cette expression de la probabilité $P_i(t)$ coïncide avec l'expression (2.24) pour les temps courts. La probabilité de présence de l'atome excité dans l'état $|\psi_a^{(1)}\rangle$ décroît de façon exponentielle avec le temps si le taux d'émission spontanée Γ_{sp} n'est pas nul. La décroissance exponentielle nous indique que l'inverse du taux d'émission spontanée Γ_{sp}^{-1} peut être interprété comme la durée de vie radiative de l'état excité $|\psi_a^{(1)}\rangle$. Alors, si la fréquence ω_{ab} est dans un *gap* du spectre de l'opérateur de Maxwell, la durée de vie radiative Γ_{sp}^{-1} devient théoriquement infinie. L'inhibition de l'émission spontanée par un cristal photonique est mise en évidence numériquement dans [42].

2.1.5 Canalisation de l'émission spontanée dans un angle solide

D'après l'estimation de Weisskopf et Wigner (2.28) de la fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$, l'état final $|\psi_f\rangle$ du processus est

$$|\psi_f\rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t)\rangle = \int \frac{\langle\psi_{\omega,\alpha}|\mathbf{H}_i|\psi_i\rangle \exp(-i\mathcal{E}_{\omega}t/\hbar)}{\hbar(\omega - \omega_{ab}) - \Delta\mathcal{E} + i\hbar\Gamma_{sp}/2} |\psi_{\omega,\alpha}\rangle \rho(\omega, \alpha) d\omega d\alpha. \quad (2.30)$$

Soit Ω un domaine de l'ensemble des (ω, α) où la densité d'état est non nulle (figure 2.1). Soit $[\omega_+, \omega_-]$ un intervalle de $[0, +\infty[$ tel que $[\omega_+, \omega_-] \times \Omega_{\alpha}$ contienne Ω et tel que la densité d'état soit nulle dans le domaine $[\omega_+, \omega_-] \times \Omega_{\alpha} \setminus \Omega$ (figure 2.1). Enfin, nous supposons que l'intersection entre $\{\omega_{ab}\} \times \Omega_{\alpha}$ et Ω est non vide (figure 2.1).

$$\begin{aligned} \rho(\omega, \alpha) &\neq 0 \quad \forall (\omega, \alpha) \in \Omega \subset [\omega_+, \omega_-] \times \Omega_{\alpha}, \\ \rho(\omega, \alpha) &= 0 \quad \forall (\omega, \alpha) \in [\omega_+, \omega_-] \times \Omega_{\alpha} \setminus \Omega, \\ \{\omega_{ab}\} \times \Omega_{\alpha} \cap \Omega &\neq \emptyset. \end{aligned} \quad (2.31)$$

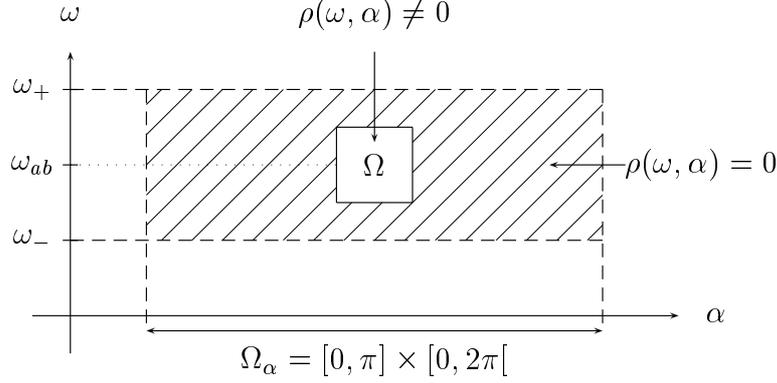


FIG. 2.1: Représentation du domaine Ω et de l'intervalle $[\omega_+, \omega_-]$. Le domaine $[\omega_+, \omega_-] \times \Omega_\alpha$ contient le domaine Ω . La densité d'état est non nulle dans le domaine Ω . La densité d'état est nulle dans le domaine hachuré $[\omega_+, \omega_-] \times \Omega_\alpha$. L'intersection entre $\{\omega_{ab}\} \times \Omega_\alpha$ et Ω est non vide.

Nous avons représenté sur la figure 2.1 un exemple dans lequel le domaine Ω et l'intervalle $[\omega_+, \omega_-]$ vérifient la condition (2.31). D'après (2.30), la distribution en fréquence de l'état final $|\psi_f\rangle$ est essentiellement déterminée par une lorentzienne centrée en $\omega_{ab} + \Delta\mathcal{E}/\hbar$ et de largeur Γ_{sp} :

$$|\langle \psi_{\omega, \alpha} | \psi_f \rangle|^2 = \frac{|\langle \psi_{\omega, \alpha} | H_i | \psi_i \rangle|^2 / \hbar^2}{[\omega - (\omega_{ab} + \Delta\mathcal{E}/\hbar)]^2 + \Gamma_{sp}^2/4} \quad \forall \omega, \alpha. \quad (2.32)$$

Si les nombres $(\omega_{ab} + \Delta\mathcal{E}/\hbar - \omega_-)$ et $(\omega_+ - \omega_{ab} - \Delta\mathcal{E}/\hbar)$ sont très grands devant le taux d'émission spontanée Γ_{sp} ,

$$\min\{|\omega_{ab} + \Delta\mathcal{E}/\hbar - \omega_\pm|\} \gg \Gamma_{sp}, \quad (2.33)$$

la contribution des termes hors du domaine $[\omega_+, \omega_-] \times \Omega_\alpha$ devient négligeable dans l'expression (2.30). Alors, si les hypothèses (2.31, 2.33) sont vérifiées, l'expression (2.30) de l'état final devient

$$|\psi_f\rangle = \int_{\Omega} \frac{\langle \psi_{\omega, \alpha} | H_i | \psi_i \rangle \exp(-i\mathcal{E}\omega t/\hbar)}{\hbar(\omega - \omega_{ab}) - \Delta\mathcal{E} + i\hbar\Gamma_{sp}/2} |\psi_{\omega, \alpha}\rangle \rho(\omega, \alpha) d\omega d\alpha. \quad (2.34)$$

Conclusion Cette dernière expression de la fonction d'onde nous indique que la distribution angulaire de l'état final est déterminée par le domaine Ω si les hypothèses (2.31, 2.33) sont vérifiées ; il est théoriquement possible de canaliser l'émission spontanée dans un angle solide étroit si l'ouverture angulaire du domaine Ω est petite.

D'après (2.25), si l'ouverture angulaire du domaine Ω est petite, alors le taux d'émission spontanée Γ_{sp} sera également petit. Il en résulte que la largeur de la distribution en fréquence (2.32), égale au taux d'émission spontanée Γ_{sp} , est aussi

nécessairement très petite ; la condition (2.33) est généralement vérifiée si l'ouverture angulaire du domaine Ω est petite.

Enfin, nous pensons qu'il existe au bord des *gaps* des domaines Ω qui vérifient toutes les conditions requises pour canaliser l'émission spontanée dans un angle solide étroit.

2.1.6 Conclusion

L'atome que nous avons introduit permet de modéliser une source optique de type solide. Nous avons montré comment un cristal photonique peut théoriquement (2.26) inhiber l'émission spontanée. Cette propriété, mise en évidence numériquement dans [42], pourrait permettre d'augmenter le rendement des lasers à semi-conducteurs utilisés dans les télécommunications : en effet, dans le cas des lasers, les photons utiles sont issus de l'émission stimulée.

Pourtant, de telles sources optiques sont également utilisées en régime d'émission spontanée : ce sont les diodes électroluminescentes. Les diodes électroluminescentes émettent un rayonnement totalement désordonné dans toutes les directions de l'espace. Nous avons montré comment un cristal photonique peut théoriquement (2.34) permettre de transformer les diodes électroluminescentes en sources optiques directives.

2.2 Trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal photonique parfait

Les cristaux photoniques se comportent, sous certains aspects, comme des milieux homogènes. Ces milieux homogènes équivalents possèdent des propriétés inhabituelles. Pour caractériser la nature de ces milieux homogènes équivalents, nous étudions la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal photonique.

Dans cette section nous commençons par définir la trajectoire du champ électromagnétique. Nous utilisons ensuite le résultat de P. Yeh *et al.* pour mettre en évidence les similitudes entre un cristal photonique et un milieu homogène. Nous déterminons la trajectoire de solutions des équations de Maxwell d'énergie finie. Nous examinons en particulier la trajectoire de solutions dont les propriétés sont proches de celles d'une fonction harmonique.

2.2.1 Définition de la trajectoire du champ électromagnétique

La densité d'impulsion du champ électromagnétique associé au couple de fonctions $F = (E, H)$ est représentée par le vecteur de Poynting $E \times H$. Le vecteur de Poynting $E \times H$ est homogène au produit d'une densité volumique d'énergie avec

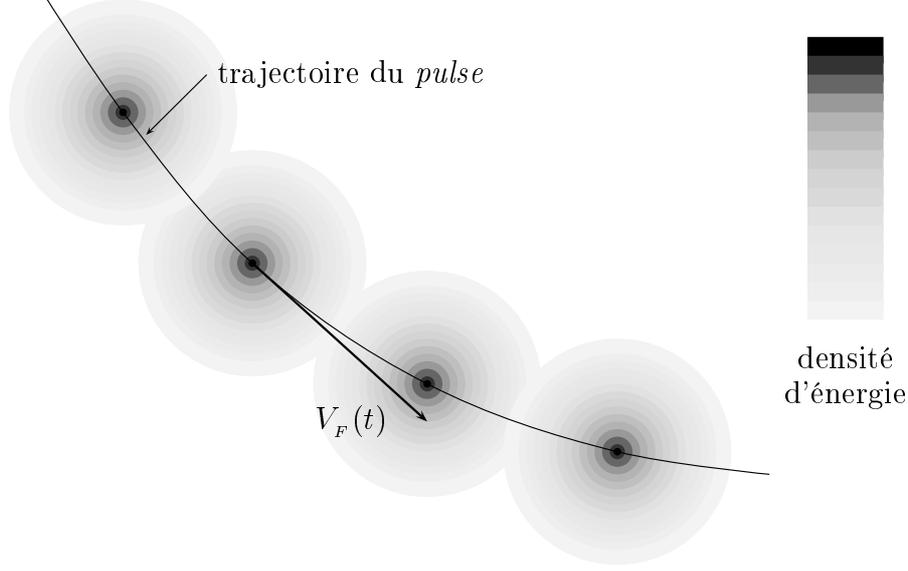


FIG. 2.2: La trajectoire d'une impulsion de lumière (ou pulse) et le vecteur $V_F(t)$.

une vitesse. Soit le vecteur $V_F(t)$, homogène à une vitesse,

$$\forall t \in \mathbb{R} : V_F(t) = \left[\int_{\mathbb{R}^3} E(t, x) \times H(t, x) dx \right] / \mathcal{E}_F, \quad (2.35)$$

où \mathcal{E}_F est l'énergie électromagnétique (1.6) indépendante du temps (1.18). L'expression (2.35) du vecteur $V_F(t)$ est bien définie si le champ F est un élément de \mathcal{H}^\perp (si le champ électromagnétique est d'énergie finie). D'après sa définition, le vecteur $V_F(t)$ est l'impulsion du champ électromagnétique normalisée par l'énergie électromagnétique : nous supposons que ce vecteur $V_F(t)$ représente le vecteur tangent à la trajectoire du champ électromagnétique (figure 2.2). Nous justifierons cette interprétation physique dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels.

L'objectif de cette section 2.2 est de transformer l'expression (2.35) du vecteur $V_F(t)$ afin de pouvoir décrire la trajectoire du champ électromagnétique à partir du spectre de l'opérateur de Maxwell.

2.2.2 Première transformation de la “vitesse” du champ électromagnétique : utilisation de la transformation de Floquet-Bloch

Les champs électrique et magnétique sont représentés par des fonctions E et H réelles : $E = \overline{E}$ et $H = \overline{H}$. Alors, l'expression (2.35) du vecteur $V_F(t)$ peut s'écrire

pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$V_F(t) = \frac{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [\overline{E(t, x)} \times H(t, x) + E(t, x) \times \overline{H(t, x)}] dx}{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [\overline{E(t, x)} \cdot \varepsilon(x) E(t, x) + \overline{H(t, x)} \cdot \mu(x) H(t, x)] dx}, \quad (2.36)$$

où nous avons remplacé l'énergie électromagnétique \mathcal{E}_F par son expression (1.6). Nous utilisons la transformation de Floquet-Bloch \mathcal{U} que nous avons définie dans la section 1.7.1. D'après la définition (1.32) de \mathcal{U} et la Γ -périodicité (1.4) des fonctions ε et μ ,

$$\mathcal{U}(\varepsilon E) = \varepsilon \mathcal{U}E \quad \text{et} \quad \mathcal{U}(\mu H) = \mu \mathcal{U}H. \quad (2.37)$$

Alors, d'après l'unitarité de la transformation de Floquet-Bloch, l'expression (2.36) du vecteur $V_F(t)$ peut s'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R} : V_F(t) = \frac{\int_{V \times V^*} \Pi_u(t, x, k) dx dk}{\int_{V \times V^*} \mathcal{E}_u(t, x, k) dx dk}, \quad (2.38)$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_u &= [\overline{\mathcal{U}E} \times \mathcal{U}H + \mathcal{U}E \times \overline{\mathcal{U}H}] / 2, \\ \mathcal{E}_u &= [\overline{\mathcal{U}E} \cdot \varepsilon \mathcal{U}E + \overline{\mathcal{U}H} \cdot \mu \mathcal{U}H] / 2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les fonctions $\mathcal{U}E$ et $\mathcal{U}H$ étant de carré sommable sur $V \times V^*$, les grandeurs Π_u et \mathcal{E}_u sont sommables sur $V \times V^*$. Alors, nous pouvons utiliser le théorème de Fubini. Nous intégrons d'abord par rapport à la variable x dans l'expression (2.38) de $V_F(t)$. Soient, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in V^*$,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_u \rangle_V(t, k) &= |V|^{-1} \int_V \Pi_u(t, x, k) dx, \\ \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k) &= |V|^{-1} \int_V \mathcal{E}_u(t, x, k) dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Alors, l'expression (2.38) du vecteur tangent à la trajectoire du champ électromagnétique devient

$$\forall t \in \mathbb{R} : V_F(t) = \frac{\int_{V^*} \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k) \left[\langle \Pi_u \rangle_V(t, k) / \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k) \right] dk}{\int_{V^*} \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k) dk}. \quad (2.41)$$

Conclusion Nous avons défini le vecteur tangent à la trajectoire du champ électromagnétique. D’après l’expression (2.41), ce vecteur $V_F(t)$ peut être interprété comme la moyenne pondérée par la “densité d’énergie dans l’espace réciproque” $\langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k)$ du vecteur $\langle \Pi_u \rangle_V(t, k) / \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k)$.

Nous allons utiliser un résultat de P. Yeh pour continuer la transformation du vecteur $V_F(t)$. Enfin, nous construirons des solutions des équations de Maxwell pour achever cette transformation.

2.2.3 Le résultat de P. Yeh : relation avec la vitesse de groupe

Soit $k \in V^*$ fixé. D’après (2.39,2.40), le vecteur $\langle \Pi_u \rangle_V(t, k) / \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k)$ s’exprime à partir des deux fonctions de Bloch $(\mathcal{U}E)(t, \cdot, k)$ et $(\mathcal{U}H)(t, \cdot, k)$. Alors, P. Yeh *et al.* [43, 44] ont montré que si ces deux fonctions de Bloch sont une solution harmonique des équations de Maxwell, le vecteur $\langle \Pi_u \rangle_V(t, k) / \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(t, k)$ est égal à la vitesse de groupe. Nous précisons ce résultat.

Décomposition de Floquet de l’opérateur \mathbb{M} Soit, pour tout $k \in V^*$, l’opérateur $\mathbb{M}(k)$ d’expression (1.12) et agissant dans l’espace de Hilbert $\mathcal{H}^\perp(k) = \mathcal{H}_\varepsilon^\perp(k) \oplus \mathcal{H}_\mu^\perp(k)$ (l’espace $\mathcal{H}_\varepsilon^\perp(k)$ est défini de même que $\mathcal{H}_\mu^\perp(k)$ en remplaçant μ par ε dans (1.31)).

De même que l’opérateur \mathbb{M} , chaque opérateur $\mathbb{M}(k)$ est autoadjoint. Enfin, de même que les opérateurs $M_H(k)$, les opérateurs $\mathbb{M}(k)$ agissent sur des fonctions du domaine borné V avec des conditions de Bloch à la frontière de V . Alors, chacun des spectres $\sigma(\mathbb{M}(k))$ est constitué de valeurs propres réelles.

Le résultat de P. Yeh Soit $\omega(k)$ une valeur propre de $\mathbb{M}(k)$ et $F_{\omega(k)}$ le vecteur propre associé. Alors, $F_{\omega(k)} \exp[-i\omega(k)t]$ est une solution harmonique des équations de Maxwell. D’après (2.39), les grandeurs $\Pi_{u, \omega(k)}$ et $\mathcal{E}_{u, \omega(k)}$ associées à cette solution harmonique $F_{\omega(k)} \exp(-i\omega(k)t)$ sont indépendantes du temps. Enfin, dans ce cas particulier d’une solution harmonique des équations de Maxwell, il est montré dans [43, 44] que

$$\langle \Pi_{u, \omega(k)} \rangle_V(k) / \langle \mathcal{E}_{u, \omega(k)} \rangle_V(k) = (\nabla_k \omega)(k). \quad (2.42)$$

La vitesse de groupe $(\nabla_k \omega)(k)$ est le gradient par rapport au vecteur k de la relation de dispersion $\omega(k)$ (1.38). La vitesse de groupe est donc dirigée suivant la normale aux surfaces de fréquence constante (figure 2.3).

Nous allons étudier le cas particulier d’un paquet de solutions harmoniques pour pouvoir utiliser le résultat (2.42).

2.2.4 Trajectoire d’un paquet de solutions harmoniques

Dans cette section 2.2.4, nous commençons par construire une solution des équations de Maxwell d’énergie finie comme une superposition de fonctions de Bloch. Nous pourrons alors achever la transformation du vecteur $V_F(t)$.

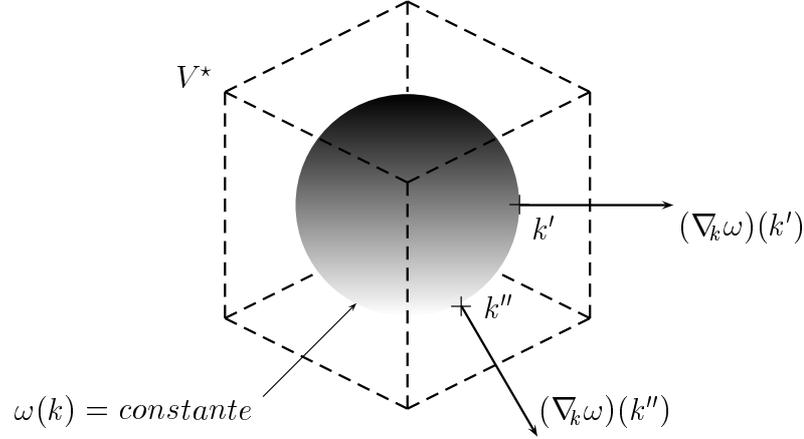


FIG. 2.3: La vitesse de groupe. La maille élémentaire V^* du réseau réciproque est représentée par le cube en pointillés. Nous avons représenté les valeurs de la vitesse de groupe $(\nabla_k \omega)(k')$ et $(\nabla_k \omega)(k'')$ aux points k' et $k'' \in V^*$. La vitesse de groupe est dirigée suivant la normale aux surfaces de fréquence constante définies de façon implicite par l'équation $\omega(k) = \text{constante}$ (nous avons schématisé ici une surface de fréquence constante par une calotte sphérique, ce qui est un cas très particulier).

Construction d'une solution des équations de Maxwell d'énergie finie
 Soit ω une fréquence qui appartient au spectre de l'opérateur \mathbb{M} . Alors, pour tout $\eta > 0$, le sous-ensemble de V^*

$$K_{\omega, \eta} = \{k \in V^* \mid \sigma(\mathbb{M}(k)) \cap [\omega - \eta, \omega + \eta] \neq \emptyset\} \quad (2.43)$$

est de mesure non-nulle. Nous avons représenté schématiquement cette relation sur la figure 2.4.

Nous pouvons justifier cette affirmation avec un théorème montré dans [31, section XIII.16] sur la décomposition de Floquet de l'opérateur \mathbb{M} . D'après le théorème XIII.85 de [31, section XIII.16],	$\omega \in \sigma(\mathbb{M}) \iff K_{\omega, \eta} = \int_{K_{\omega, \eta}} dk \neq 0 \quad \forall \eta > 0. \quad (2.44)$
---	--

Soit $A_{\omega, \eta}$ une fonction localement de carré sommable de V^* dans \mathbb{C} dont le support est inclus dans $K_{\omega, \eta}$.

$$\int_{V^*} |A_{\omega, \eta}(k)|^2 dk = \int_{K_{\omega, \eta}} |A_{\omega, \eta}(k)|^2 dk < \infty. \quad (2.45)$$

Alors, d'après (2.44), pour tout $\omega \in \sigma(\mathbb{M})$ et pour tout $\eta > 0$, nous pouvons trouver une fonction $A_{\omega, \eta} \neq 0$ qui vérifie (2.45). Enfin, d'après la définition (2.43), pour tout $k \in K_{\omega, \eta}$, il existe une valeur propre $\omega(k)$ et un vecteur propre $F_{\omega(k)}$ de $\mathbb{M}(k)$. Nous

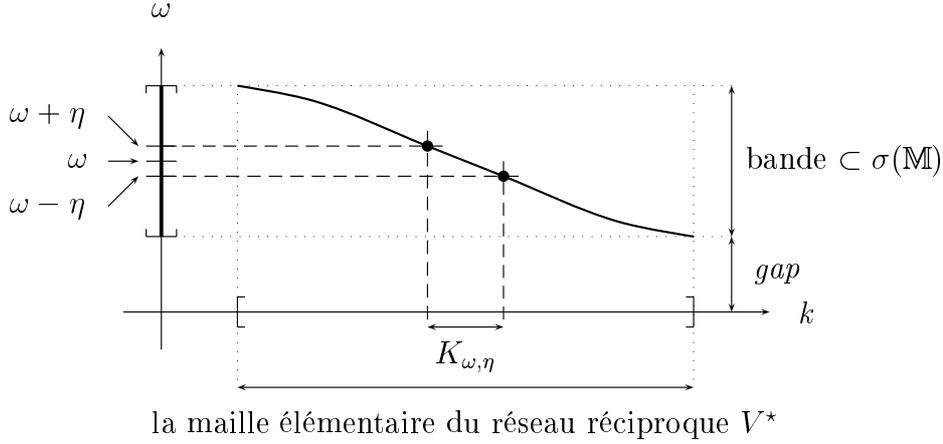


FIG. 2.4: Représentation de l'ensemble $K_{\omega,\eta}$. La fréquence ω est dans le spectre de \mathbb{M} : alors, le volume de l'ensemble $K_{\omega,\eta}$ est non-nul pour tout $\eta > 0$.

normalisons ce vecteur propre: $\|F_{\omega(k)}\|_{\mathcal{H}(k)} = 1$ où $\|\cdot\|_{\mathcal{H}(k)}$ est la norme dans $\mathcal{H}^\perp(k)$. Nous pouvons alors définir le paquet de solutions harmoniques $F_{A_{\omega,\eta}}$ d'amplitude $A_{\omega,\eta}$.

$$\forall t \in \mathbb{R} : F_{A_{\omega,\eta}}(t) = \int_{V^*} A_{\omega,\eta}(k) F_{\omega(k)} \exp[-i\omega(k)t] dk. \quad (2.46)$$

Le champ $F_{A_{\omega,\eta}}(t)$ ainsi défini est bien d'énergie finie (autrement dit, $F_{A_{\omega,\eta}}(t) \in \mathcal{H}^\perp$ pour tout $t \in \mathbb{R}$) et vérifie les équations de Maxwell (1.14) au sens des distributions.

Preuve de l'existence de $F_{A_{\omega,\eta}}(t)$ Nous vérifions que le champ $F_{A_{\omega,\eta}}(t)$ est bien un élément de \mathcal{H}^\perp . D'après l'unitarité de la transformation de Floquet-Bloch,

$$\begin{aligned} \|F_{A_{\omega,\eta}}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= (2\pi)^3 \int_{V^*} |A_{\omega,\eta}(k)|^2 \|F_{\omega(k)}\|_{\mathcal{H}(k)}^2 dk \\ &= (2\pi)^3 \int |A_{\omega,\eta}(k)|^2 dk < \infty. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Le champ $F_{A_{\omega,\eta}}(t)$ est un élément de \mathcal{H}^\perp .

Trajectoire d'un paquet de solutions harmoniques Nous pouvons maintenant donner l'expression du vecteur $V_{A_{\omega,\eta}}(t)$ associé à la solution (2.46).

D'après la définition (2.40) et l'égalité (2.47), la "densité d'énergie dans l'espace réciproque" $\langle \mathcal{E}_u \rangle_V(k)$ est proportionnelle au module carré de l'amplitude du paquet (2.46).

$$\forall k \in V^* : \langle \mathcal{E}_u \rangle_V(k) = \frac{(2\pi)^3}{2} |A_{\omega,\eta}(k)|^2 \|F_{\omega(k)}\|_{\mathcal{H}(k)}^2 = \frac{(2\pi)^3}{2} |A_{\omega,\eta}(k)|^2. \quad (2.48)$$

Alors, d'après (2.42) et (2.48), l'expression (2.41) du vecteur tangent à la trajectoire

du champ électromagnétique devient

$$\forall t \in \mathbb{R} : V_{A_{\omega,\eta}}(t) = \frac{\int_{V^*} |A_{\omega,\eta}(k)|^2 (\nabla_k \omega)(k) dk}{\int_{V^*} |A_{\omega,\eta}(k)|^2 dk}. \quad (2.49)$$

Conclusion Nous avons exprimé le vecteur tangent à la trajectoire d'un paquet de solutions harmoniques (2.46). Ce vecteur tangent $V_{A_{\omega,\eta}}$ est indépendant du temps : $V_{A_{\omega,\eta}}(t) = V_{A_{\omega,\eta}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après son expression (2.49), le vecteur $V_{A_{\omega,\eta}}$ peut être interprété comme la moyenne pondérée de la vitesse de groupe. Le poids de cette moyenne est le module carré $|A_{\omega,\eta}(k)|^2$ de l'amplitude du paquet de solutions harmoniques $F_{A_{\omega,\eta}}(t)$. En supposant que le vecteur $V_{A_{\omega,\eta}}$ décrit la vitesse du centre $X_{A_{\omega,\eta}}(t)$ du paquet $F_{A_{\omega,\eta}}(t)$, l'expression (2.49) montre que la trajectoire de ce centre $X_{A_{\omega,\eta}}(t)$ du paquet de solutions harmoniques (2.46) est rectiligne.

$$\forall t \geq 0 : X_{A_{\omega,\eta}}(t) = X_{A_{\omega,\eta}}(0) + V_{A_{\omega,\eta}} t. \quad (2.50)$$

2.2.5 Trajectoire d'une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique

Dans cette section nous examinons la trajectoire d'une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique. Cette estimation nous permettra d'utiliser les résultats de cette première partie dans les parties suivantes. En effet, nous chercherons des solutions des équations de Maxwell harmoniques (4) dans les deuxième et troisième parties. Enfin, ces solutions sont d'excellentes approximations des impulsions lumineuses utilisées dans les expériences en optique.

Nous commençons par définir une approximation d'une fonction harmonique. Nous construirons ensuite une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique. Enfin, nous pourrions déterminer la trajectoire d'une telle solution.

Définition 2.1 Soient ϵ et τ deux réels positifs. Le paramètre ϵ représente une erreur aussi petite que l'on veut et le paramètre τ représente une durée aussi grande que l'on veut (figure 2.5). La fonction $F_{\omega,\epsilon,\tau}(t) \in \mathcal{H}^\perp$ est une approximation de la fonction harmonique $F_\omega(t) \in \mathcal{H}^\perp$ si

$$\forall t \in [0, \tau] : \|F_{\omega,\epsilon,\tau}(t) - F_\omega(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon. \quad (2.51)$$

Alors, si ϵ est très petit (de l'ordre de 10^{-9}) et τ est très grand (quelques siècles), la fonction $F_{\omega,\epsilon,\tau}(t)$ possède des propriétés très proches de celles de la fonction harmonique $F_\omega(t)$.

Construction d'une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique Dans cette section 2.2.5 nous appliquons le résultat précédent

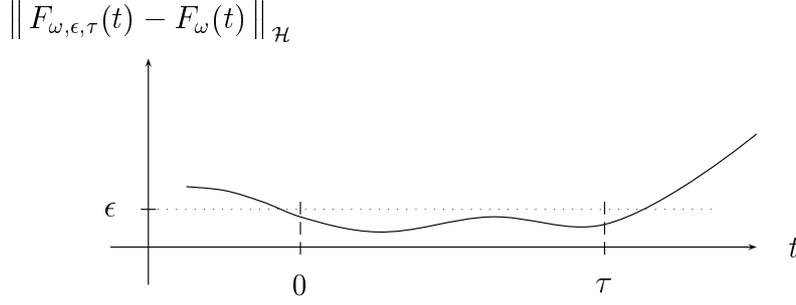


FIG. 2.5: Différence entre la fonction harmonique $F_\omega(t)$ et son approximation $F_{\omega, \epsilon, \tau}(t)$.

(de la section 2.2.4) dans le cas où l'amplitude $A_{\omega, \eta}$ du paquet de solutions harmoniques est la fonction constante $(2\pi)^{-3/2} |K_{\omega, \eta}|^{-1/2}$ dans $K_{\omega, \eta}$. Soit $F_{\omega, \eta}(t)$ ce paquet de solutions harmoniques. Alors, d'après (2.46),

$$\forall t \in \mathbb{R} : F_{\omega, \eta}(t) = (2\pi)^{-3/2} |K_{\omega, \eta}|^{-1/2} \int_{K_{\omega, \eta}} F_{\omega(k)} \exp[-i\omega(k)t] dk. \quad (2.52)$$

Nous définissons le champ harmonique $F_\omega(t)$ proche du champ $F_{\omega, \eta}(t)$

$$\forall t \in \mathbb{R} : F_\omega(t) = (2\pi)^{-3/2} |K_{\omega, \eta}|^{-1/2} \int_{K_{\omega, \eta}} F_{\omega(k)} \exp(-i\omega t) dk. \quad (2.53)$$

Alors, si nous choisissons $\eta = \epsilon/\tau$, les fonctions $F_{\omega, \eta}(t)$ et $F_\omega(t)$ vérifient la relation (2.51) : la solution des équations de Maxwell $F_{\omega, \epsilon/\tau}(t)$ est proche de la fonction harmonique $F_\omega(t)$.

Estimation de la différence entre $F_{\omega, \eta}(t)$ et $F_\omega(t)$ Nous vérifions que les fonctions $F_{\omega, \eta}(t)$ et $F_\omega(t)$ vérifient la relation (2.51) si $\eta = \epsilon/\tau$. D'après les expressions (2.52) et (2.53), pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{\omega, \eta}(t) - F_\omega(t) = (2\pi)^{-3/2} |K_{\omega, \eta}|^{-1/2} \int_{K_{\omega, \eta}} F_{\omega(k)} \{ \exp[-i\omega(k)t] - \exp[-i\omega t] \} dk.$$

D'après l'unitarité de la transformation de Floquet-Bloch,

$$\|F_{\omega, \eta}(t) - F_\omega(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = |K_{\omega, \eta}|^{-1} \int_{K_{\omega, \eta}} \|F_{\omega(k)}\|_{\mathcal{H}(k)}^2 | \exp[-i\omega(k)t] - \exp[-i\omega t] |^2 dk.$$

Enfin, en utilisant la majoration $| \exp[-i\omega(k)t] - \exp[-i\omega t] | \leq | \omega(k)t - \omega t | \leq \eta|t|$, nous pouvons estimer la différence entre $F_{\omega, \eta}(t)$ et $F_\omega(t)$:

$$\|F_{\omega, \eta}(t) - F_\omega(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq |K_{\omega, \eta}|^{-1} \int_{K_{\omega, \eta}} \eta^2 t^2 dk = \eta^2 t^2. \quad (2.54)$$

Alors, si nous choisissons $\eta = \epsilon/\tau$, les fonctions $F_{\omega, \eta}(t)$ et $F_\omega(t)$ vérifient la relation (2.51). Nous pouvons faire ce choix de η parce que le spectre de \mathbb{M} vérifie la propriété (2.44).

Trajectoire d'une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique Nous pouvons maintenant donner l'expression du vecteur $V_{F\omega,\eta}$ associé à la solution (2.52). D'après (2.49),

$$V_{F\omega,\eta} = |K_{\omega,\eta}|^{-1} \int_{K_{\omega,\eta}} (\nabla_k \omega)(k) dk. \quad (2.55)$$

Soit $\{k_0\}$ la limite de la suite décroissante $K_{\omega,\eta}$ quand la largeur de la distribution en fréquence η tend vers zéro.

$$\{k_0\} = \bigcap_{\eta>0} K_{\omega,\eta}. \quad (2.56)$$

Alors, l'amplitude $|K_{\omega,\eta}|^{-1}$ se comporte comme la "fonction" de Dirac $\delta(k - k_0)$ quand la largeur de la distribution en fréquence η tend vers zéro. La limite de l'expression (2.55) de $V_{F\omega,\eta}$ est

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} V_{F\omega,\eta} = (\nabla_k \omega)(k_0). \quad (2.57)$$

La trajectoire d'une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique est une droite dont la direction est proche de la vitesse de groupe.

2.2.6 Conclusion

Nous avons montré que la propagation d'un paquet de solutions harmoniques dans un cristal photonique (ou paquet de modes de Bloch) est semblable à la propagation d'un paquet d'ondes planes dans un milieu homogène (les ondes planes étant des solutions harmoniques particulières dans un milieu homogène). Dans les deux cas, la trajectoire est une droite dont la direction est la moyenne pondérée (par le module carré de l'amplitude du paquet de solution harmonique) de la vitesse de groupe.

Pourtant, les cristaux photoniques présentent des intérêts. En effet, la relation de dispersion (1.38) est beaucoup plus riche dans le cas d'un cristal photonique ; la vitesse de groupe ne dépend que de la norme du vecteur k dans le cas d'un milieu homogène alors que, dans le cas du cristal photonique, la vitesse de groupe dépend de la norme et de la direction du vecteur k . Surtout, dans le cas d'un cristal photonique, la vitesse de groupe peut varier très rapidement en fonction de la fréquence ω : le milieu homogène équivalent est alors extrêmement dispersif. Prenons le cas d'une solution des équations de Maxwell proche d'une fonction harmonique ; d'après (2.57) la direction de la trajectoire de ces solutions est la vitesse de groupe. Si la vitesse de groupe varie très rapidement en fonction de la fréquence, deux solutions de fréquences très voisines peuvent avoir des trajectoires totalement différentes. Cette propriété, mise en évidence numériquement dans [23] dans le cas de cristaux photoniques bidimensionnels, serait susceptible de mener à d'importantes applications dans le domaine des télécommunications par fibre optique.

Première partie

Conclusion

Dans cette première partie, nous avons présenté quelques propriétés du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique parfait.

Le cristal photonique parfait possède un maximum de symétries qui permettent de simplifier l'étude du spectre de l'opérateur de Maxwell. Cependant, la nature du problème reste complexe et ne permet de donner que des estimations qualitatives du comportement du champ électromagnétique.

Nous avons étudié en détail le comportement d'une source optique de type solide. Nous avons montré comment un cristal photonique peut théoriquement corriger les défauts de ces sources. Un cristal photonique est susceptible d'inhiber l'émission spontanée d'un photon d'énergie $\hbar\omega$ si la fréquence ω n'appartient pas au spectre de l'opérateur de Maxwell (la fréquence ω est dans un *gap*): cette propriété est mise en évidence numériquement dans [42]. Un cristal photonique est susceptible de canaliser dans un angle solide étroit l'émission spontanée de photons d'énergie $\hbar\omega$ si la fréquence ω se trouve au bord d'un *gap*.

Nous avons également étudié en détail la trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal parfait. Nous avons montré que, de même que dans un milieu homogène, la trajectoire du champ électromagnétique est déterminée par la vitesse de groupe. Des exemples numériques dans le cas de cristaux photoniques bidimensionnels [45, 23] montrent que leurs propriétés sont semblables (sous certains aspects) à des milieux homogènes d'indice optique proche de zéro ou même négatif. Enfin, des applications possibles du caractère très dispersif des cristaux photoniques sont également présentées dans [23].

Nous pensons que la nature complexe du problème nécessite une approche numérique. En effet, seules les méthodes numériques permettent de déterminer de façon rigoureuse le spectre de l'opérateur de Maxwell pour des cristaux photoniques tridimensionnels. Nous présenterons donc une méthode numérique dans la troisième partie; cette méthode numérique nous permettra de mettre en évidence les propriétés du comportement du champ électromagnétique que nous avons présentées dans cette première partie.

Enfin, nous pensons que la méthode qui consiste à modéliser le cristal photonique

par un cristal parfait ne rend pas compte de toutes les propriétés de diffraction des cristaux photoniques. Nous compléterons donc cette première partie par une étude détaillée de l'influence des interfaces séparant le cristal photonique du milieu extérieur dans les deuxième et troisième parties ; nous réaliserons cette étude pour des cristaux photoniques monodimensionnels.

Deuxième partie

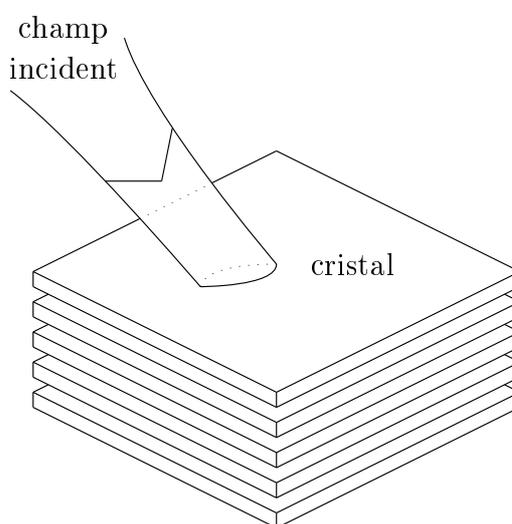
Etude théorique de la diffraction par
un cristal photonique
monodimensionnel

Deuxième partie

Introduction

Soit un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie éclairé par un champ électromagnétique incident : le problème consiste à déterminer le champ électromagnétique diffracté par le cristal.

Comparée à l'étude des propriétés d'un cristal parfait, l'étude de la diffraction par un cristal photonique permet d'apporter des informations supplémentaires ; l'étude de cette deuxième partie nous permettra, en particulier, de déterminer l'influence des interfaces planes séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur. Cette étude permettra alors de compléter la présentation usuelle des propriétés des cristaux photoniques de la première partie.



La diffraction par un cristal photonique monodimensionnel.

La simplicité du modèle décrivant un cristal photonique monodimensionnel permet d'obtenir l'expression analytique des différentes grandeurs physiques. La démarche générale de notre étude est la suivante. Nous considérons dans un premier temps un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie. Nous résolvons le

problème de la diffraction par le cristal puis nous faisons croître l'épaisseur du cristal vers l'infini (ce que nous appelons la limite thermodynamique). Supposons qu'une grandeur physique possède une limite quand l'épaisseur du cristal tend vers l'infini. Alors cette limite est une bonne estimation de la grandeur physique pour un cristal d'épaisseur suffisamment grande. Cette démarche a déjà été utilisée dans l'étude des *gaps* [46, 47] et du coefficient de réflexion [48, 49] des cristaux photoniques monodimensionnels. Enfin, nous illustrerons nos résultats par des exemples numériques.

Dans le chapitre 3 nous décrivons un système qui permet de modéliser la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel. Puis nous présentons la méthode que nous avons retenue pour résoudre le problème : nous utilisons les matrices de transfert. Enfin, nous déterminons le champ électromagnétique diffracté par un cristal monodimensionnel d'épaisseur finie.

Dans le chapitre 4 nous étudions les propriétés du champ électromagnétique diffracté par le cristal quand l'épaisseur de celui-ci tend vers l'infini (limite thermodynamique). Nous étudions la limite de diverses grandeurs associées au champ électromagnétique : les coefficients de transmission et de réflexion, les fonctions représentant le champ électromagnétique diffracté par le cristal, le flux du vecteur de Poynting à travers les interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur et le centre de l'énergie électromagnétique. Cette démarche nous permettra de retrouver dans le cas particulier d'un cristal photonique monodimensionnel certains résultats établis dans la première partie. Surtout, cette démarche nous permettra de déterminer l'influence des interfaces planes séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur : nous compléterons ainsi l'étude réalisée dans la première partie. Nous montrerons dans quelles conditions nous pouvons utiliser la règle simple de la théorie des rayons valable en optique géométrique. Nous illustrerons numériquement les différents résultats que nous obtiendrons.

Enfin, nous récapitulerons de façon synthétique les résultats les plus importants de cette deuxième partie dans la section 4.7 et la conclusion (de cette deuxième partie).

Nous citons quelques sujets de recherche sur les cristaux photoniques monodimensionnels que nous n'aborderons pas. La simplicité du modèle permet de déterminer l'expression analytique de nombreuses grandeurs physiques. L'expression de la densité d'état est donnée dans [50, 51] et l'émission d'un dipôle est étudiée dans [52]. Les modes localisés dans un cristal photonique monodimensionnel possédant un défaut sont étudiés dans [53]. Enfin, les cristaux photoniques monodimensionnels avec absorption sont étudiés dans [54] et les quasi-cristaux monodimensionnels dans [55].

Chapitre 3

La méthode des matrices de transfert

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire le système qui nous permet de modéliser la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel ; ce système se compose d'un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie et d'un champ électromagnétique harmonique.

Nous présentons dans la section 3.3 la méthode que nous avons retenue pour trouver les solutions des équations de Maxwell à l'intérieur du cristal : nous utilisons la méthode des matrices de transfert. Nous montrons les propriétés de ces matrices qui seront utilisées dans la suite de notre étude.

Enfin, nous imposons la condition d'onde sortante aux limites du cristal dans la section 3.4. Nous définissons les coefficients de réflexion et de transmission puis nous déterminons leurs expressions. Nous pourrions alors donner l'expression du champ électromagnétique solution des équations de Maxwell en présence d'un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie dans la section 3.5.

3.1 Description du cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie

Dans cette deuxième partie nous utilisons un repère orthonormé (O, e_1, e_2, e_3) . Tout élément x de l'espace \mathbb{R}^3 est repéré par ses trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 .

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad \text{avec} \quad e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1)$$

Nous choisissons le repère (O, e_1, e_2, e_3) tel que la permittivité ε et la perméabilité μ soient des fonctions de la seule variable x_3 (figure 3.1).

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x) = \varepsilon(x_3) \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu(x_3). \quad (3.2)$$

Le cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie est un empilement de n couches élémentaires inhomogènes identiques d'épaisseur h_3 (figure 3.1). Le cristal se trouve entre un superstrat homogène, caractérisé par les constantes positives ε^u et μ^u , et un substrat homogène, caractérisé par les constantes positives ε^d et μ^d (figure 3.1). Alors, la permittivité ε et la perméabilité μ vérifient à l'intérieur du cristal

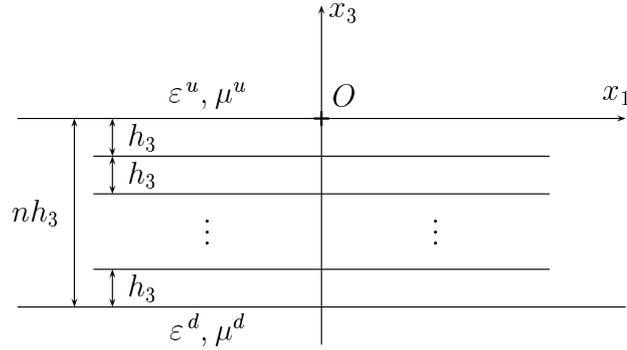


FIG. 3.1: *Un cristal photonique constitué de n couches élémentaires identiques d'épaisseur h_3 . Les constantes ε^u et μ^u caractérisent le superstrat et les constantes ε^d et μ^d caractérisent le substrat.*

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_3 - mh_3) &= \varepsilon(x_3) \quad \forall m \in \{1, \dots, n-1\}, \forall x_3 \in [-h_3, 0], \\ \mu(x_3 - mh_3) &= \mu(x_3) \quad \forall m \in \{1, \dots, n-1\}, \forall x_3 \in [-h_3, 0], \end{aligned} \quad (3.3)$$

et à l'extérieur du cristal

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_3) &= \varepsilon^u > 0 \quad \forall x_3 \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_3) = \varepsilon^d > 0 \quad \forall x_3 \leq -nh_3, \\ \mu(x_3) &= \mu^u > 0 \quad \forall x_3 \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu(x_3) = \mu^d > 0 \quad \forall x_3 \leq -nh_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous avons représenté sur la figure 3.2 un exemple de permittivité ε qui permet de décrire le cristal. Nous appelons couche élémentaire l'ensemble

$$\{x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid -h_3 \leq x_3 \leq 0\} \quad (3.5)$$

qui permet d'engendrer le cristal.

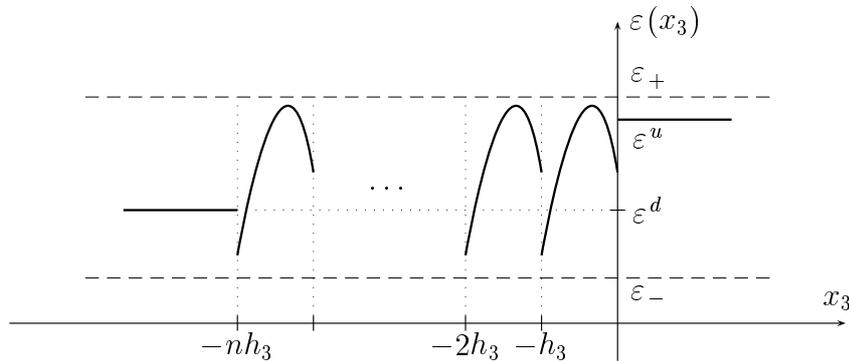


FIG. 3.2: *Exemple de permittivité. La fonction ε est bornée inférieurement par $\varepsilon_- > 0$ et supérieurement par $\varepsilon_+ > 0$. La fonction ε est "périodique" dans l'intervalle $[-nh_3, 0]$. La fonction ε est égale aux constantes $\varepsilon^u > 0$ dans le superstrat et $\varepsilon^d > 0$ dans le substrat.*

Cas particulier La couche élémentaire la plus simple (et non triviale) est constituée de deux strates homogènes diélectriques et non magnétiques. La perméabilité μ est égale à la perméabilité du vide μ_0 dans toute la couche élémentaire :

$$\mu(x_3) = \mu_0 \quad \forall x_3 \in [-h_3, 0]. \quad (3.6)$$

La première strate est d'épaisseur $h \in]0, h_3[$ et de constante diélectrique ε_1 et la deuxième strate est d'épaisseur $h_3 - h$ et de constante diélectrique $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$:

$$\varepsilon(x_3) = \varepsilon_1 > 0 \quad \forall x_3 \in [-h, 0] \quad \text{et} \quad \varepsilon(x_3) = \varepsilon_2 > 0 \quad \forall x_3 \in [-h_3, -h]. \quad (3.7)$$

3.2 Hypothèses sur le champ électromagnétique harmonique

Dans cette deuxième partie nous considérons un champ électromagnétique harmonique. Les champs complexes E_ω et H_ω vérifient les équations de Maxwell harmoniques (4). Dans cette section 3.2, nous présentons nos hypothèses sur les champs complexes E_ω et H_ω .

Hypothèse II.1 En toute rigueur, les champs complexes E_ω et H_ω sont des fonctions des trois variables x_1, x_2 et x_3 . Cependant, nous nous limitons à des champs dépendant uniquement des deux variables x_1 et x_3 .

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : E_\omega(x) = E_\omega(x_1, x_3) \quad \text{et} \quad H_\omega(x) = H_\omega(x_1, x_3). \quad (3.8)$$

En effet, il résulterait de l'abandon de cette hypothèse simplificatrice des notations lourdes et compliquées sans réels intérêts. L'étude d'un champ électromagnétique dépendant des trois variables x_1, x_2 et x_3 en présence d'un dioptré plan est réalisée dans [56]. Avec l'hypothèse (3.8), nous décrivons un champ électromagnétique non pas en forme de faisceau mais en forme de nappe invariante dans la direction e_2 .

Conséquence de l'hypothèse II.1 *Réduction des équations de Maxwell à deux équations scalaires indépendantes.* Avec l'hypothèse (3.8), les équations de Maxwell harmoniques (4) se réduisent au système des deux équations scalaires et indépendantes

$$\begin{aligned} (\partial_1^2 + \mu \partial_3 \mu^{-1} \partial_3 + \omega^2 \varepsilon \mu) E_{\omega,2} &= 0, \\ (\partial_1^2 + \varepsilon \partial_3 \varepsilon^{-1} \partial_3 + \omega^2 \varepsilon \mu) H_{\omega,2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les quatre autres composantes $E_{\omega,1}, E_{\omega,3}, H_{\omega,1}$ et $H_{\omega,3}$ du champ électromagnétique s'expriment à partir de ces deux composantes $E_{\omega,2}$ et $H_{\omega,2}$.

$$\begin{aligned} E_{\omega,1} &= (i\omega \varepsilon)^{-1} \partial_3 H_{\omega,2}, & E_{\omega,3} &= -(i\omega \varepsilon)^{-1} \partial_1 H_{\omega,2}, \\ H_{\omega,3} &= (i\omega \mu)^{-1} \partial_1 E_{\omega,2}, & H_{\omega,1} &= -(i\omega \mu)^{-1} \partial_3 E_{\omega,2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous appelons champ électromagnétique de polarisation TE les trois composantes $E_{\omega,2}$, $H_{\omega,1}$ et $H_{\omega,3}$ et champ électromagnétique de polarisation TM les trois composantes $H_{\omega,2}$, $E_{\omega,1}$ et $E_{\omega,3}$. D'après (3.9,3.10), les champs de polarisation TE et TM sont découplés; nous pouvons les étudier séparément. Soient U , ν , ν^u et ν^d définis suivant la polarisation.

$$\begin{aligned} \text{Polarisation TE : } U &= E_{\omega,2}, \nu = \mu, \nu^u = \mu^u \quad \text{et} \quad \nu^d = \mu^d. \\ \text{Polarisation TM : } U &= H_{\omega,2}, \nu = \varepsilon, \nu^u = \varepsilon^u \quad \text{et} \quad \nu^d = \varepsilon^d. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La fonction U est dans tous les cas de polarisation l'unique composante suivant le deuxième axe du champ électromagnétique. Les équations de Maxwell (3.9) deviennent pour la composante U du champ électromagnétique

$$(\partial_1^2 + \nu \partial_3 \nu^{-1} \partial_3 + \omega^2 \varepsilon \mu)U = 0. \quad (3.12)$$

Hypothèse II.2 Nous cherchons des fonctions U telles que, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$, la fonction $U(\cdot, x_3)$ soit de carré sommable par rapport à la variable x_1 .

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : U(\cdot, x_3) \in L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C}) \iff \int_{\mathbb{R}} |U(x_1, x_3)|^2 dx_1 < \infty. \quad (3.13)$$

Alors, la fonction $U(\cdot, x_3)$ possède une transformée de Fourier $\widehat{U}(\cdot, x_3)$ que nous pouvons écrire formellement

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : \widehat{U}(\alpha_1, x_3) = \frac{|\omega|}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} U(x_1, x_3) \exp(-i\omega\alpha_1 x_1) dx_1 \quad \forall \alpha_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Physiquement, cette deuxième hypothèse (3.13) signifie que la densité d'énergie est, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$, sommable par rapport à la variable x_1 .

Hypothèse II.3 Nous verrons dans la section 3.4 que la fonction U s'écrit dans le superstrat et le substrat comme un paquet d'ondes planes de constante de propagation $\omega\alpha_1$ suivant le premier axe. Le cristal photonique étant monodimensionnel, toute onde plane de constante de propagation $\omega\alpha_1$ est provoquée par une onde plane incidente de même constante de propagation. Nous supposons que le champ incident est créé par des sources très éloignées du cristal. C'est pourquoi nous jugeons peu restrictif de considérer un champ incident exclusivement constitué d'ondes planes propagatives. Alors, nous supposons que la fonction U s'écrit dans le superstrat et le substrat comme un paquet d'ondes planes propagatives. Autrement dit, le support de la fonction $\widehat{U}(\cdot, x_3)$ doit être inclus dans l'intervalle

$$K_1 = [-\alpha_+, \alpha_+] \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha_+^2 < \min \{ \varepsilon^u \mu^u, \varepsilon^d \mu^d \}. \quad (3.15)$$

La troisième hypothèse que nous faisons sur le champ électromagnétique s'écrit alors

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus K_1 \implies \widehat{U}(\alpha_1, x_3) = 0. \quad (3.16)$$

Récapitulation Nous avons fait une première hypothèse (3.8) d'invariance selon une direction sur des champs électromagnétiques justifiée par le fait de simplifier le problème. Cette première hypothèse a permis de réduire les équations de Maxwell à deux équations scalaires indépendantes. Nous avons ensuite fait deux autres hypothèses (3.13,3.16) justifiées par des raisons physiques. D'après la transformation de Fourier inverse,

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : U(x_1, x_3) = \int_{K_1} \widehat{U}(\alpha_1, x_3) \exp(i\omega\alpha_1 x_1) d\alpha_1 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

La fonction $\widehat{U}(\cdot, x_3)$ étant de carré sommable et à support borné (inclus dans K_1), elle est également sommable.

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : \int_{K_1} |\widehat{U}(\alpha_1, x_3)|^2 d\alpha_1 < \infty \implies \int_{K_1} |\widehat{U}(\alpha_1, x_3)| d\alpha_1 < \infty. \quad (3.18)$$

Alors, la fonction $U(\cdot, x_3)$ d'expression (3.17) représentant le champ électromagnétique est, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$, bornée, infiniment dérivable et de carré sommable par rapport à la variable x_1 (ainsi que toutes ses dérivées). Surtout, cette fonction $U(\cdot, x_3)$ tend vers zéro lorsque la variable x_1 tend vers l'infini. Alors, notre modèle permet de décrire la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel fini dans les première et troisième directions de l'espace. Cette conclusion suppose que l'influence de la matière est négligeable là où le champ électromagnétique est lui-même négligeable.

Enfin, la fonction $U(\cdot, x_3)$ et ses dérivées première et seconde étant de carré sommable, la transformée de Fourier de l'équation (3.12) est

$$[\nu\partial_3\nu^{-1}\partial_3 + \omega^2(\varepsilon\mu - \alpha_1^2)]\widehat{U} = 0. \quad (3.19)$$

Nous n'avons imposé aucune condition au champ électromagnétique dans la troisième direction. Nous nous contentons de la continuité des composantes tangentielles $E_{\omega,1}, H_{\omega,1}, E_{\omega,2}$ et $H_{\omega,2}$ du champ électromagnétique au passage des interfaces : cette condition est contenue dans l'équation (3.19). En effet, d'après (3.10), il suffit que les fonctions $\widehat{U}(\alpha_1, \cdot)$ et $\nu^{-1}\partial_3\widehat{U}(\alpha_1, \cdot)$ soient continues pour tout $\alpha_1 \in K_1$. La suite de ce chapitre consiste à résoudre l'équation (3.19).

3.3 Méthode de résolution des équations de Maxwell dans le cristal : les matrices de transfert

Dans cette section 3.3, nous résolvons l'équation (3.19) dans le cristal. L'équation (3.19) s'écrit sous forme d'une équation de propagation :

$$\partial_3\widehat{F} = M\widehat{F} \quad \text{avec} \quad \widehat{F} = \begin{bmatrix} \widehat{U} \\ \nu^{-1}\partial_3\widehat{U} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ \omega^2(\alpha_1^2 - \varepsilon\mu)/\nu & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Le vecteur $\widehat{F}(\alpha_1, \cdot)$ est, de même que les fonctions $\widehat{U}(\alpha_1, \cdot)$ et $\nu^{-1}\partial_3\widehat{U}(\alpha_1, \cdot)$, continu pour tout $\alpha_1 \in K_1$.

Dans cette section 3.3, nous déterminons la dépendance en x_3 du vecteur $\widehat{F}(\alpha_1, \cdot)$; nous ne faisons plus apparaître la dépendance en α_1 des différentes fonctions afin d'alléger les notations. Nous commençons par définir les matrices de transfert. Nous définirons ensuite une matrice de transfert particulière : la matrice de transfert T associée à la couche élémentaire du cristal. Enfin, nous montrerons les propriétés des matrices de transfert qui seront nécessaires dans la suite de notre étude.

3.3.1 Définition des matrices de transfert

Pour résoudre l'équation de propagation (3.20), nous utilisons le théorème X.69 de [57, section X.12] sur la série de Dyson. D'après l'hypothèse (6) sur les fonctions ε et μ , la matrice $M(x_3)$ est uniformément bornée par rapport à la variable $x_3 \in \mathbb{R}$. Soit $\|M\|_\infty$ la norme uniforme de la matrice M et $|M(x_3)|$ la norme de la matrice $M(x_3) \in \mathbb{C}^4$. D'après l'expression (3.20) de la matrice M ,

$$\|M\|_\infty = \sup \{ |M(x_3)| \mid x_3 \in \mathbb{R} \} \leq \varepsilon_+ + \mu_+ + 2\omega^2 \varepsilon_+ \mu_+ (\varepsilon_-^{-1} + \mu_-^{-1}). \quad (3.21)$$

Soit \widehat{F} une solution de l'équation (3.20). Alors, d'après (3.21) et le théorème X.69 de [57, section X.12], la solution de l'équation de propagation (3.20) vérifie

$$\forall x_3, x'_3 \in \mathbb{R} : \widehat{F}(x_3) = P(x_3, x'_3) \widehat{F}(x'_3) \quad \text{avec} \quad \widehat{F}(x'_3) \in \mathbb{C}^2. \quad (3.22)$$

Définition 3.1 *L'ensemble $\{P(x_3, x'_3) \mid x_3, x'_3 \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices de transfert (ou matrices de propagation).*

Expression des matrices de transfert La forme explicite des matrices de transfert à partir des matrices $M(x_3)$ est donnée par une série de Dyson. Pour tout $x_3, x'_3 \in \mathbb{R}$:

$$P(x_3, x'_3) = I + \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{x'_3}^{x_3} dy_1 \int_{x'_3}^{y_1} dy_2 \cdots \int_{x'_3}^{y_{m-1}} dy_m M(y_1) M(y_2) \cdots M(y_m). \quad (3.23)$$

où I est la matrice identité 2×2 .

Preuve de l'existence de la série de Dyson Nous vérifions immédiatement que cette expression des matrices de transfert est bien définie. D'après (3.21), nous pouvons majorer la matrice M par sa norme uniforme $\|M\|_\infty$ dans chaque terme de la série de Dyson (3.23). D'où, pour tout $x_3, x'_3 \in \mathbb{R}$:

$$|P(x_3, x'_3)| \leq 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|x_3 - x'_3|^m}{m!} \|M\|_\infty^m = \exp(|x_3 - x'_3| \|M\|_\infty). \quad (3.24)$$

Alors, la série de Dyson converge et la matrice de transfert $P(x_3, x'_3)$ est bien définie pour tout $x_3, x'_3 \in \mathbb{R}$.

Solutions de l'équation de propagation Enfin, nous vérifions que le vecteur \widehat{F} défini par (3.22) est bien solution de l'équation de propagation (3.20). Nous commençons par dé-

river par rapport à la variable x_3 l'expression (3.23) de la matrice de transfert.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_3}(x_3, x'_3) &= M(x_3) + \sum_{m=2}^{+\infty} \int_{x'_3}^{x_3} dy_2 \cdots \int_{x'_3}^{y_{m-1}} dy_m M(x_3) M(y_2) \cdots M(y_m) \\ &= M(x_3) \left[I + \sum_{m=2}^{+\infty} \int_{x'_3}^{x_3} dy_2 \cdots \int_{x'_3}^{y_{m-1}} dy_m M(y_2) \cdots M(y_m) \right]. \end{aligned}$$

En renommant les variables y_2, y_3, \dots, y_m respectivement y_1, y_2, \dots, y_{m-1} dans chaque terme de la dernière série, nous obtenons

$$\frac{\partial P}{\partial x_3}(x_3, x'_3) = M(x_3)P(x_3, x'_3). \quad (3.25)$$

Alors, en particulier, le vecteur $x_3 \mapsto \widehat{F}(x_3) = P(x_3, x'_3)\widehat{F}(x'_3)$ vérifie l'équation de propagation (3.20) :

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial x_3}(x_3) = \frac{\partial P}{\partial x_3}(x_3, x'_3)\widehat{F}(x'_3) = M(x_3)P(x_3, x'_3)\widehat{F}(0) = M(x_3)\widehat{F}(x_3). \quad (3.26)$$

Récapitulation Nous avons défini l'ensemble des matrices de transfert. Nous avons vérifié que ces matrices sont bien définies et qu'elles permettent de résoudre l'équation de propagation (3.20). La définition (3.23) des matrices de transfert que nous avons adoptée va nous permettre de montrer certaines propriétés qui seront nécessaires dans la suite de notre étude.

Nous pouvons maintenant définir la matrice de transfert à la travers la couche élémentaire du cristal.

3.3.2 La matrice de transfert à travers la couche élémentaire : la matrice T

Définition 3.2 Soit T la matrice de transfert à travers la couche élémentaire (3.5) du cristal. Alors,

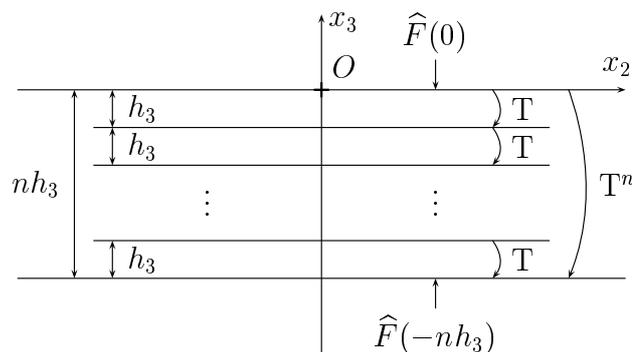
$$T = P(-h_3, 0). \quad (3.27)$$

D'après la "périodicité" (3.3) des fonctions ε et μ à l'intérieur du cristal, la matrice T est aussi égale à la matrice de transfert $P(-mh_3, -mh_3 + h_3)$ pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$. Alors, d'après (3.22), la matrice T relie les différentes valeurs du vecteur \widehat{F} aux interfaces planes séparant les différentes couches élémentaires à l'intérieur du cristal (figure 3.3).

$$\widehat{F}(-mh_3) = T\widehat{F}(-mh_3 + h_3) \quad \forall m \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.28)$$

Enfin, d'après cette dernière relation, la matrice T^n relie les valeurs du vecteur \widehat{F} au limites du cristal (figure 3.3).

$$\widehat{F}(-nh_3) = T^n \widehat{F}(0). \quad (3.29)$$

FIG. 3.3: *La matrice de transfert à travers la couche élémentaire : la matrice T .*

Cette équation (3.29) que nous avons obtenue permet de décrire le comportement du champ électromagnétique en présence du cristal. Cette équation comprend les valeurs du vecteur \widehat{F} aux bords du cristal et la matrice de transfert à travers le cristal T^n .

Nous commençons par montrer quelques propriétés de la matrice T puis nous fixons les conditions aux limites du cristal (ou les valeurs $\widehat{F}(-nh_3)$ et $\widehat{F}(0)$ du vecteur \widehat{F}) dans la section 3.4.

De même que les matrices M et P , la matrice T dépend de la fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ et de la variable $\alpha_1 \in K_1$.

$$T : \mathbb{R} \times K_1 \ni (\omega, \alpha_1) \longmapsto T(\omega, \alpha_1). \quad (3.30)$$

Nous montrons dans la section 3.3.3 que la matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 . Soient T_{11} , T_{12} , T_{21} et T_{22} les quatre coefficients de la matrice T .

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Nous montrons la conséquence des symétries sur les coefficients T_{11} , T_{12} , T_{21} et T_{22} de la matrice T dans les sections 3.3.4 et 3.3.5.

3.3.3 La matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1

Propriété 3.1 *La matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 .*

Preuve de la propriété 3.1 Pour montrer que la matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 , nous écrivons la matrice T comme une série entière en fonction de la variable α_1 . D'après la majoration (3.24), nous pouvons sommer les termes de la série de Dyson dans un ordre différent (la série est normalement convergente). Nous commençons par séparer la matrice M en deux parties.

$$M = N_1 + \alpha_1^2 N_2 \quad \text{avec} \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ -\omega^2 \varepsilon \mu / \nu & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^2 / \nu & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

De même que la matrice M , les matrices N_1 et N_2 sont uniformément bornées par rapport à la variable x_3 . Soient $\|N_1\|_\infty$ et $\|N_2\|_\infty$ les normes uniformes des matrices N_1 et N_2 .

$$\begin{aligned} \|N_1\|_\infty &= \sup \{ |N_1(x_3)| \mid x_3 \in \mathbb{R} \} \leq \varepsilon_+ + \mu_+ + \omega^2 \varepsilon_+ \mu_+ (\varepsilon_-^{-1} + \mu_-^{-1}), \\ \|N_2\|_\infty &= \sup \{ |N_2(x_3)| \mid x_3 \in \mathbb{R} \} \leq \omega^2 (\varepsilon_-^{-1} + \mu_-^{-1}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Alors, nous pouvons écrire chaque produit de matrices M intervenant dans les termes de la série (3.23) comme

$$M(y_1) \cdots M(y_m) = \sum_{l=0}^m (\alpha_1^2)^l N_{m,l}(y_1, \dots, y_m), \quad (3.34)$$

où les matrices $N_{m,l}$ sont uniformément bornées par rapport à l'ensemble des variables y_1, \dots, y_m . Soit $\|N_{m,l}\|_\infty$ la norme uniforme de la matrice $N_{m,l}$. D'après (3.32,3.33,3.34),

$$\|N_{m,l}\|_\infty \leq \frac{m!}{l!(m-l)!} \|N_2\|_\infty^l \|N_1\|_\infty^{m-l} \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, l \in \{0, \dots, m\}. \quad (3.35)$$

Alors, si nous sommons les termes de la série (3.23) dans un autre ordre, l'expression de la matrice T devient

$$T(\alpha_1) = I + \sum_{l=1}^{+\infty} (\alpha_1^2)^l \sum_{m=l}^{+\infty} \int_0^{-h_3} dy_1 \cdots \int_0^{y_{m-1}} dy_m N_{m,l}(y_1, \dots, y_m). \quad (3.36)$$

Cette expression montre que nous pouvons développer la dépendance en α_1 de la matrice T en série entière. Nous montrons maintenant que le rayon de cette série est infini. D'après (3.35,3.36),

$$\begin{aligned} |T(\alpha_1)| &\leq 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} (\alpha_1^2)^l \sum_{m=l}^{+\infty} \frac{m!}{l!(m-l)!} \|N_2\|_\infty^l \|N_1\|_\infty^{m-l} \frac{h_3^m}{m!} \\ &\leq 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(\alpha_1^2)^l h_3^l \|N_2\|_\infty^l}{l!} \exp(\|N_1\|_\infty h_3) \\ &\leq \exp(\|N_1\|_\infty h_3) \exp(\alpha_1^2 \|N_2\|_\infty h_3). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que la matrice T se développe comme une série entière de la variable α_1 de rayon infini. Alors, la matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 .

Remarque Un raisonnement semblable peut permettre de montrer que la matrice T est infiniment dérivable par rapport à la fréquence ω .

3.3.4 Conséquences de la conservation du flux du vecteur de Poynting

L'expression du vecteur de Poynting complexe est $E_\omega \times \overline{H}_\omega/2$. D'après les équations de Maxwell harmoniques (4) et l'hypothèse (5) (les matériaux que nous considérons sont sans pertes), la divergence de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe est nulle: $\nabla \cdot (E_\omega \times \overline{H}_\omega + \overline{E}_\omega \times H_\omega)/4 = 0$. Alors, le flux à travers toute surface fermée de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe est également nul. Dans cette section 3.3.4, nous déterminons les conséquences de cette conservation sur la matrice T .

Propriété 3.2 *La matrice T est réelle et son déterminant est égal à 1.*

$$T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1. \quad (3.37)$$

Preuve de la propriété 3.2 La propriété (3.37) est la conséquence directe de l'hypothèse (5): les fonctions ε et μ sont à valeurs réelles. Nous montrons cette propriété à partir de l'expression (3.23) de la matrice T . Le fait que la matrice T soit réelle découle immédiatement du fait que les fonctions ε et μ sont réelles. Pour montrer que la matrice T est de déterminant 1 nous utilisons la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

D'après (3.20) et l'hypothèse (5), la matrice M vérifie $M^*J = -JM$, où M^* est la matrice adjointe de M . Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ le produit scalaire dans \mathbb{C}^2 . Alors, la quantité $\langle \widehat{F}(x_3), J\widehat{F}(x_3) \rangle_{\mathbb{C}^2}$ correspond physiquement au flux à travers l'interface plane d'altitude x_3 de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe. Nous montrons que cette quantité est indépendante de x_3 . D'après (3.26),

$$\begin{aligned} \partial_3 \langle \widehat{F}, J\widehat{F} \rangle_{\mathbb{C}^2} &= \langle \partial_3 \widehat{F}, J\widehat{F} \rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \widehat{F}, J\partial_3 \widehat{F} \rangle_{\mathbb{C}^2} \\ &= \langle M\widehat{F}, J\widehat{F} \rangle_{\mathbb{C}^2} + \langle \widehat{F}, JM\widehat{F} \rangle_{\mathbb{C}^2} \\ &= \langle \widehat{F}, [M^*J + JM]\widehat{F} \rangle_{\mathbb{C}^2} = 0. \end{aligned}$$

Alors, d'après (3.22), pour tout $x_3 \notin \mathbb{R}$:

$$\langle \widehat{F}(x_3), J\widehat{F}(x_3) \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle \widehat{F}(x_3), J\widehat{F}(x_3) \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle P(x_3)\widehat{F}(x_3), JP(x_3)\widehat{F}(x_3) \rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

Cette conservation valable pour tout $\widehat{F}(x_3) \in \mathbb{C}^2$ implique que les matrices de transfert (et en particulier la matrice T) vérifient une relation de "pseudo-unitarité".

$$\forall x_3, x'_3 \in \mathbb{R} : P(x_3, x'_3)^* JP(x_3, x'_3) = J \implies T^* JT = J. \quad (3.39)$$

La matrice T étant réelle, il suffit de développer cette relation pour vérifier que le déterminant de la matrice T est égal à 1.

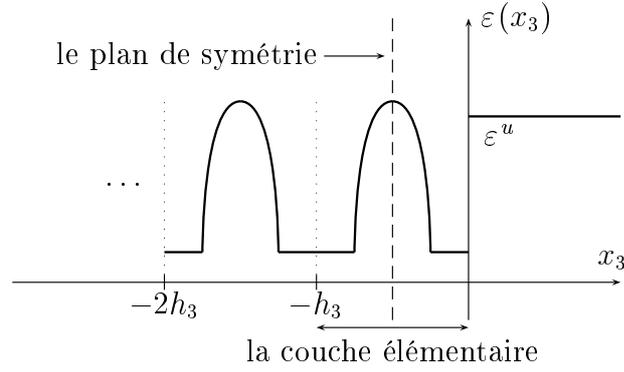


FIG. 3.4: Exemple de couche élémentaire symétrique par rapport à un plan.

3.3.5 Conséquences de la symétrie d'une couche élémentaire par rapport à un plan horizontal

Dans cette section 3.3.5, nous examinons le cas particulier où la couche élémentaire du cristal est symétrique par rapport à un plan (figure 3.4). Dans ce cas, les fonctions ε et μ vérifient

$$\forall x_3 \in [-h_3, 0] : \varepsilon(-h_3 - x_3) = \varepsilon(x_3) \quad \text{et} \quad \mu(-h_3 - x_3) = \mu(x_3). \quad (3.40)$$

Propriété 3.3 Si la couche élémentaire du cristal est symétrique par rapport à un plan horizontal, alors la matrice T vérifie $T_{11} = T_{22}$.

$$(3.40) \implies T_{11} = T_{22}. \quad (3.41)$$

Preuve de la propriété 3.3 Nous utilisons l'expression (3.23) de la matrice T pour montrer cette propriété. En effectuant successivement dans chaque terme de la série (3.23) les changements de variable y_m en $(-h_3 - y_m)$, puis y_{m-1} en $(-h_3 - y_{m-1})$, \dots , puis y_1 en $(-h_3 - y_1)$ nous obtenons la relation

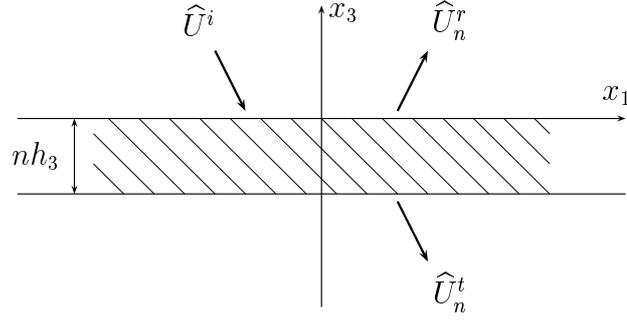
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

où $T^{-1} = P(0, -h_3)$ est la matrice inverse de T . Alors, en identifiant cette nouvelle expression (3.42) de la matrice T^{-1} avec celle obtenue à partir de la conservation du flux du vecteur de Poynting ((3.39) $\implies T^{-1} = -JT^*J$) nous obtenons le résultat $T_{11} = T_{22}$.

3.4 Les conditions aux limites du cristal : la condition d'onde sortante

Dans cette section 3.4, nous fixons les conditions aux limites du cristal : nous fixons les valeurs $\hat{F}(-nh_3)$ et $\hat{F}(0)$ dans l'équation (3.29). Soient

$$\alpha_3^u(\alpha_1) = \sqrt{\varepsilon^u \mu^u - \alpha_1^2} \quad \text{et} \quad \alpha_3^d(\alpha_1) = \sqrt{\varepsilon^d \mu^d - \alpha_1^2} \quad \forall \alpha_1 \in K_1. \quad (3.43)$$

FIG. 3.5: *Les conditions aux limites du cristal: la condition d'onde sortante.*

Alors, l'équation (3.19) vérifiée par la fonction \widehat{U} devient à l'extérieur du cristal

$$\begin{aligned} [\partial_3^2 + (\omega\alpha_3^u)^2] \widehat{U} &= 0 \quad \forall x_3 \geq 0, \\ [\partial_3^2 + (\omega\alpha_3^d)^2] \widehat{U} &= 0 \quad \forall x_3 \leq -nh_3. \end{aligned} \quad (3.44)$$

La solution de cette équation (3.45) est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles montantes ou descendantes (d'argument $\pm i\omega\alpha_3^u x_3$ dans le superstrat et $\pm i\omega\alpha_3^d x_3$ dans le substrat). Soit \widehat{U}^i la fonction représentant le champ incident que nous supposons connu. Le champ incident se dirige vers le cristal; le champ incident est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles descendantes dans le superstrat et montantes dans le substrat. Le champ diffracté, défini comme la différence du champ total moins le champ incident, est l'inconnue. Ce champ diffracté vérifie la condition d'onde sortante; il est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles montantes dans le superstrat et descendantes dans le substrat. Soient \widehat{U}_n^u et \widehat{U}_n^d les fonctions représentant le champ total dans le superstrat et dans le substrat en présence du cristal constitué de n couches élémentaires. Nous supposons dans un premier temps que les sources qui créent le champ incident sont exclusivement situées dans le superstrat. Alors, à l'extérieur du cristal, le champ électromagnétique se réduit à

$$\widehat{U}_n^u = \widehat{U}^i + \widehat{U}_n^r \quad \forall x_3 \geq 0 \quad \text{et} \quad \widehat{U}_n^d = \widehat{U}_n^t \quad \forall x_3 \leq -nh_3, \quad (3.45)$$

où les fonctions \widehat{U}_n^r et \widehat{U}_n^t représentent les champs réfléchis et transmis (figure 3.5). Soit A l'amplitude du champ électromagnétique incident. Alors,

$$\widehat{U}^i(\cdot, x_3) = A \exp[-i\omega\alpha_3^u x_3] \quad \forall x_3 \geq 0. \quad (3.46)$$

D'après (3.18), l'amplitude A est, en toute généralité, une fonction de carré sommable de K_1 dans \mathbb{C} :

$$\int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 d\alpha_1 < \infty. \quad (3.47)$$

L'expression générale des fonctions \widehat{U}_n^t et \widehat{U}_n^r vérifiant la condition (3.18) est

$$\begin{aligned} \widehat{U}_n^t(\cdot, x_3) &= A t_n^d \exp[-i\omega\alpha_3^d(x_3 + nh_3)] \quad \forall x_3 \leq -nh_3, \\ \widehat{U}_n^r(\cdot, x_3) &= A r_n^u \exp[i\omega\alpha_3^u x_3] \quad \forall x_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u dépendent de la fréquence ω et de la variable $\alpha_1 \in K_1$. Soient

$$\beta^u = \omega \alpha_3^u / \nu^u \quad \text{et} \quad \beta^d = \omega \alpha_3^d / \nu^d. \quad (3.49)$$

Alors, d'après l'expression (3.45) de la fonction \widehat{U} à l'extérieur du cristal et la définition (3.20) du vecteur \widehat{F} , l'équation (3.29) devient

$$\begin{bmatrix} t_n^d \\ -i\beta^d t_n^d \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} 1 + r_n^u \\ -i\beta^u (1 - r_n^u) \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Récapitulation Nous avons imposé au champ électromagnétique la condition d'onde sortante. Alors, les équations de Maxwell se résument au système linéaire à deux inconnues (3.50). Dans la section 3.5 suivante, nous résolvons ce système; nous déterminons les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u .

3.5 Expression du champ électromagnétique diffracté par le cristal photonique monodimensionnel

Le calcul de la matrice T à la puissance n fait intervenir ses valeurs propres. Nous commençons donc par déterminer celles-ci, puis nous donnons l'expression de la matrice de transfert à travers le cristal. Nous pourrions alors donner l'expression des coefficients de réflexion et de transmission puis du champ électromagnétique diffracté par le cristal photonique monodimensionnel.

3.5.1 Les valeurs propres de la matrice T

La trace de la matrice T joue un rôle fondamental. En effet, si λ est valeur propre de la matrice T , alors

$$\det(T - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} T + \det T = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} T + 1 = 0, \quad (3.51)$$

où $\operatorname{tr} T = T_{11} + T_{22}$ est la trace de la matrice T et où nous avons utilisé la propriété (3.37). Autrement dit, les valeurs propres de la matrice T sont entièrement déterminées par la trace de la matrice T . L'équation (3.51) incite à définir la fonction

$$\cos \varphi = \operatorname{tr} T / 2 \quad \text{avec} \quad \varphi(\omega, \alpha_1) \in [0, \pi] \cup i[0, +\infty[\quad \forall (\omega, \alpha_1) \in \mathbb{R} \times K_1. \quad (3.52)$$

Alors, nous pouvons exprimer simplement les valeurs propres λ_{\pm} à partir de la fonction φ . D'après (3.51, 3.52),

$$\det(T - \lambda_{\pm} I) = 0 \iff \lambda_{\pm} = \exp(\pm i\varphi). \quad (3.53)$$

Les valeurs propres de la matrice T nous permettront de faire le lien avec la première partie dans la section 4.1.

3.5.2 Expression de la matrice de transfert à travers le cristal

Avec la notation (3.52), nous montrons que l'expression de la matrice de transfert à travers le cristal est

$$T^n = I \cos(n\varphi) + (T - I \cos \varphi) \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.54)$$

La matrice T^n étant, de même que la matrice T , infiniment dérivable, la fonction $\sin(n\varphi)/\sin \varphi$ est définie par son prolongement analytique quand la fonction φ tend vers 0 ou π . En particulier, la fonction $\sin(n\varphi)/\sin \varphi$ tend vers n quand $\varphi \rightarrow 0$ et vers $-n(-1)^n$ quand $\varphi \rightarrow \pi$.

Preuve de l'égalité (3.54) Nous montrons l'égalité (3.54) par récurrence. Pour $n = 1$ l'égalité (3.54) est vraie puisque $T = T$. Nous supposons que l'égalité (3.54) est vraie pour n . Alors,

$$T^{n+1} = TT^n = T \cos(n\varphi) + (T^2 - T \cos \varphi) \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}.$$

En utilisant la propriété $\det T = 1$, on montre que $T^2 = (\operatorname{tr} T)T - I = (2 \cos \varphi)T - I$. Alors, après avoir remplacé T^2 par son expression en fonction de T et I , nous obtenons

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \left[\cos(n\varphi) + \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \cos \varphi \right] - I \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \\ &= I \cos[(n+1)\varphi] + (T - I \cos \varphi) \frac{\sin[(n+1)\varphi]}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

Alors l'égalité (3.54) est vraie pour $n+1$. Nous pouvons donc conclure que l'égalité (3.54) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3.5.3 Expression des coefficients de transmission et de réflexion

Nous remplaçons la matrice T^n par son expression (3.54) dans l'équation (3.50). La solution du système obtenu est

$$\begin{aligned} t_n^d &= \frac{\beta^u}{q_c \cos(n\varphi) + iq_s \sin(n\varphi)/\sin \varphi}, \\ r_n^u &= \frac{p_c \cos(n\varphi) + ip_s \sin(n\varphi)/\sin \varphi}{q_c \cos(n\varphi) + iq_s \sin(n\varphi)/\sin \varphi}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

où

$$\begin{aligned} p_c &= (\beta^u - \beta^d)/2, \quad p_s = (\beta^u \beta^d T_{12} + T_{21})/2 + i(\beta^u + \beta^d)(T_{11} - T_{22})/4, \\ q_c &= (\beta^u + \beta^d)/2, \quad q_s = (\beta^u \beta^d T_{12} - T_{21})/2 + i(\beta^u - \beta^d)(T_{11} - T_{22})/4. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Enfin, nous donnons une propriété des coefficients de réflexion et de transmission qui découlent immédiatement de celles de la matrice T . Une conséquence de cette propriété nous assure de l'existence de l'expression (3.55) des coefficients de transmission et de réflexion.

Propriété 3.4 *La conservation du flux du vecteur de Poynting implique que*

$$\forall \in \mathbb{N} : (\beta^d/\beta^u)|t_n^d|^2 + |r_n^u|^2 = 1. \quad (3.57)$$

Conséquence de la propriété 3.4 *Le dénominateur présent dans l'expression (3.55) des coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u n'est jamais nul. En effet, d'après (3.57),*

$$\forall \in \mathbb{N} : |q_c \cos(n\varphi) + iq_s \sin(n\varphi)/\sin \varphi|^2 \geq \beta^u \beta^d. \quad (3.58)$$

Preuve de la propriété 3.4 Le flux du vecteur de Poynting à travers l'interface plane d'altitude $x_3 = 0$ est égal à celui à travers l'interface plane d'altitude $x_3 = -nh_3$. D'après (3.39,3.50),

$$\left\langle \begin{bmatrix} t_n^d \\ -i\beta^d t_n^d \end{bmatrix}, J \begin{bmatrix} t_n^d \\ -i\beta^d t_n^d \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 + r_n^u \\ -i\beta^u(1 - r_n^u) \end{bmatrix}, J \begin{bmatrix} 1 + r_n^u \\ -i\beta^u(1 - r_n^u) \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ est le produit scalaire dans \mathbb{C}^2 et où l'expression de la matrice J est (3.38). Il suffit de développer cette dernière égalité pour montrer l'égalité (3.57).

3.5.4 Expression du champ électromagnétique diffracté par le cristal photonique monodimensionnel

Soient U_n^u et U_n^d les restrictions de la deuxième composante du champ électromagnétique dans le superstrat et dans le substrat. Ces fonctions s'expriment à partir de la transformée de Fourier inverse (3.17) des fonctions \widehat{U}_n^u et \widehat{U}_n^d . Alors, d'après (3.45), la fonction U_n^u se compose d'une partie incidente U^i et d'une partie réfléchie U_n^r et la fonction U_n^d se réduit à sa partie transmise U_n^t .

$$U_n^u = U^i + U_n^r \quad \forall x_3 \geq 0 \quad \text{et} \quad U_n^d = U_n^t \quad \forall x_3 \leq -nh_3. \quad (3.59)$$

D'après l'expression (3.46) de la fonction \widehat{U}^i , l'expression du champ incident est pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, pour tout $x_3 \geq 0$:

$$U^i(x_1, x_3) = \int_{K_1} A(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 - \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1. \quad (3.60)$$

Enfin, d'après l'expression (3.48) des fonctions \widehat{U}_n^t et \widehat{U}_n^r , l'expression du champ électromagnétique diffracté par le cristal constitué de n couches élémentaires est pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \leq -nh_3$:

$$U_n^t(x_1, x_3) = \int_{K_1} A(\alpha_1) t_n^d(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 - \alpha_3^d(\alpha_1)(x_3 + nh_3)]\} d\alpha_1, \quad (3.61)$$

et pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \geq 0$:

$$U_n^r(x_1, x_3) = \int_{K_1} A(\alpha_1) r_n^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1, \quad (3.62)$$

3.6 Conclusion

Nous avons présenté un modèle qui permet de décrire fidèlement la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel. Le point de départ de notre modèle est constitué par les équations de Maxwell harmoniques (4). Nous avons présenté toutes les hypothèses que nous avons faites pour obtenir le meilleur compromis entre le réalisme de la description et la simplicité des calculs.

Nous avons donné l'expression de la solution des équations de Maxwell en présence d'un cristal photonique monodimensionnel constitué de n couches élémentaires. La partie inconnue de cette solution (ou champ diffracté) est composée du champ transmis U_n^t et du champ réfléchi U_n^r . L'expression (3.62,3.61) du champ diffracté est déterminée par les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u . L'expression (3.55) de ces coefficients fait intervenir les paramètres du superstrat, du substrat, de la matrice de transfert à travers la couche élémentaire du cristal (la matrice T), et le nombre de couches élémentaires n .

L'expression du champ électromagnétique que nous avons obtenue est trop complexe pour pouvoir déterminer le comportement du champ diffracté. C'est pourquoi nous adoptons la démarche qui consiste à faire tendre l'épaisseur du cristal photonique vers l'infini : l'expression du champ électromagnétique se trouve alors simplifiée. Nous déterminons les propriétés de ce champ électromagnétique limite dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Propriétés du champ diffracté à la limite thermodynamique

Dans ce chapitre, nous étudions la limite du champ diffracté par le cristal photonique quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini (ou limite thermodynamique). Les dimensions du cristal deviennent alors très grandes devant la longueur d'onde du champ électromagnétique. C'est pourquoi notre interprétation des propriétés du cristal sera largement inspirée de l'optique géométrique. En particulier, nous montrons dans ce chapitre que l'influence des interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur peut être interprétée par la théorie des rayons.

D'après le chapitre 3, le champ diffracté est représenté par les fonctions U_n^t et U_n^r : ces fonctions sont déterminées par les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u .

Nous étudions la convergence simple des coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u dans la section 4.2. Cette notion de convergence consiste à fixer la variable $\alpha_1 \in K_1$ (la fréquence ω étant toujours fixée dans cette deuxième partie) et à étudier les suites de complexes $\{r_n^u(\alpha_1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{t_n^d(\alpha_1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Cette première approche nous permettra de déterminer le domaine où le cristal se comporte comme un miroir parfait (ou domaine interdit) et le domaine où le cristal est toujours transparent (ou domaine de transparence).

Cette approche nous permettra également de faire le lien avec les résultats établis dans la première partie que nous aurons appliqués dans le cas particulier du cristal photonique monodimensionnel dans la section 4.1.

Enfin, nous verrons qu'avec cette approche les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u ne possèdent pas de limite simple dans le domaine de transparence.

C'est pourquoi nous emploierons d'autres notions de convergence ; nous étudierons directement la convergence des fonctions U_n^t et U_n^r représentant le champ diffracté dans la section 4.4. D'après les hypothèses (3.17,3.18) que nous avons faites sur le champ électromagnétique, les fonctions U_n^t et U_n^r sont uniformément bornées (par rapport aux variables $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \leq -nh_3$ pour U_n^t et par rapport aux variables

$x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0$ pour U_n^r). Il semble alors naturel d'étudier la convergence uniforme des fonctions U_n^t et U_n^r . Il apparaît que le résultat que nous obtenons n'est pas totalement satisfaisant : nous n'obtenons la convergence uniforme que sur tout ensemble compact inclus dans le substrat pour U_n^t et inclus dans le superstrat pour U_n^r . Nous analyserons physiquement notre résultat.

Ensuite, nous étudierons la convergence en moyenne quadratique des fonctions U_n^t et U_n^r . Nous montrerons le résultat suivant : *les fonctions U_n^t et U_n^r représentant le champ diffracté ne possèdent pas de limite en moyenne quadratique*. Ce résultat négatif nous incitera donc à étudier la convergence de grandeur physiques scalaires.

Nous étudierons la limite du flux du vecteur de Poynting dans la section 4.5. Nous déterminerons alors l'influence des interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur. Nous montrerons que le comportement du champ électromagnétique en présence du cristal peut être interprété par la théorie des rayons. Nous pourrions également justifier l'interprétation de la limite uniforme sur tout compact du champ réfléchi.

Enfin, nous étudierons la limite du centre de l'énergie du champ électromagnétique diffracté dans la section 4.6. Cette étude permet de rassembler de façon cohérente les résultats sur la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal et l'interprétation de l'influence des interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur.

Nous récapitulerons les résultats importants de ce chapitre dans la section 4.7.

Dans tout ce chapitre, nous utilisons un lemme fondamental que nous énonçons dans la section 4.3 (la preuve de ce lemme est reportée dans l'annexe A).

4.1 Le domaine de transparence et le domaine interdit dans un cristal photonique monodimensionnel parfait

Dans cette section 4.1, nous revenons au modèle que nous avons étudié dans la première partie ; nous déterminons la relation de dispersion dans un cristal photonique monodimensionnel parfait. Nous pourrions alors définir les domaines de transparence et interdit à partir du modèle du cristal parfait.

4.1.1 La relation de dispersion

Nous nous plaçons dans le modèle de la première partie : nous considérons alors un cristal périodique dans les directions e_1 et e_3 (son épaisseur est infinie). Le caractère périodique dans la direction e_1 est artificiel puisque le cristal est en fait invariant dans la direction e_1 ; nous pouvons choisir arbitrairement la période spatiale (fictive) dans la direction e_1 . Soit h_1 cette période. Alors, les vecteurs de la base du réseau

Γ (1.2) et de la base réciproque (1.3) sont

$$d_1 = h_1 e_1, \quad d_3 = h_3 e_3, \quad d_1^* = (2\pi/h_1) e_1 \quad \text{et} \quad d_3^* = (2\pi/h_3) e_3. \quad (4.1)$$

Supposons que la matrice T possède une valeur propre $\exp(i\varphi)$ de module 1. Soit $\widehat{F}_\varphi(0)$ le vecteur propre associé. Alors, le vecteur $F_\omega : (x_1, x_3) \mapsto \exp(i\omega\alpha_1 x_1) \times P(x_3, 0)\widehat{F}_\varphi(0)$ vérifie pour tout $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_\omega(x_1 + h_1, x_3) &= \exp(i2\pi k_1) F_\omega(x_1, x_3) \quad \text{avec} \quad k_1 = \omega\alpha_1 h_1 / (2\pi), \\ F_\omega(x_1, x_3 + h_3) &= \exp(i2\pi k_3) F_\omega(x_1, x_3) \quad \text{avec} \quad k_3 = -\varphi / (2\pi). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous justifions la deuxième partie de cette relation (4.2). D'après la définition (3.22) des matrices de transfert,

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : \widehat{F}_\varphi(x_3 + h_3) = P(x_3 + h_3, h_3) T^{-1} \widehat{F}_\varphi(0) = P(x_3 + h_3, h_3) \exp(-i\varphi) \widehat{F}_\varphi(0).$$

D'après la périodicité des fonctions ε et μ , $P(x_3 + h_3, h_3) = P(x_3, 0)$. Alors,

$$\forall x_3 \in \mathbb{R} : \widehat{F}_\varphi(x_3 + h_3) = \exp(-i\varphi) P(x_3, 0) \widehat{F}_\varphi(0) = \exp(-i\varphi) \widehat{F}_\varphi(x_3).$$

Nous avons montré la deuxième partie de la relation (4.2).

Nous choisissons la période h_1 suffisamment petite pour que la variable α_1 puisse décrire l'ensemble K_1 (3.15): $h_1 \leq \pi / (\omega\alpha_+)$. D'après (4.2, 3.26), le vecteur F_ω est une fonction de Bloch solution des équations de Maxwell. Ce vecteur permet donc de définir un vecteur propre de l'opérateur $\mathbb{M}(k_1, k_3)$ (nous avons défini l'opérateur $\mathbb{M}(k_1, k_2, k_3)$ dans la section 2.2.3). D'après (3.52, 3.53), la matrice T possède une valeur propre de module 1 si $|2 \cos \varphi| = |\text{tr} T(\omega, \alpha_1)| \leq 2$. Alors, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et pour tout $k_1, k_3 \in [-1/2, 1/2]$:

$$\omega \in \sigma(\mathbb{M}(k_1, k_3)) \iff 2 \cos(2\pi k_3) = \text{tr} T[\omega, 2\pi k_1 / (\omega h_1)]. \quad (4.3)$$

Cette relation $2 \cos(2\pi k_3) = \text{tr} T[\omega, 2\pi k_1 / (\omega h_1)]$ qui relie la fréquence ω et le vecteur k réduit à ses deux composantes (k_1, k_3) est la relation de dispersion du cristal photonique monodimensionnel [31, section XIII.16].

Désormais, nous n'indiquerons plus la dépendance en fréquence de la matrice T : pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ fixé et pour tout $\alpha_1 \in K_1$ nous notons $T(\alpha_1)$ la matrice $T(\omega, \alpha_1)$.

4.1.2 Définition des domaines de transparence et interdit

Pour chaque fréquence ω fixée nous réalisons une partition de l'ensemble K_1 suivant qu'il existe des fonctions de Bloch solution des équations de Maxwell dans le cristal ou pas. Soient

$$\begin{aligned} G &= \{\alpha_1 \in K_1 \mid |\text{tr} T(\alpha_1)/2| > 1\}, \\ \Delta_0 &= \{\alpha_1 \in K_1 \mid |\text{tr} T(\alpha_1)/2| = 1\}, \\ B &= \{\alpha_1 \in K_1 \mid |\text{tr} T(\alpha_1)/2| < 1\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

D'après la relation de dispersion (4.3), l'ensemble G correspond aux valeurs de α_1 pour lesquelles il n'existe pas de fonction de Bloch solution des équations de Maxwell dans le cristal : nous appelons cet ensemble le domaine interdit. L'ensemble B correspond aux valeurs de α_1 pour lesquelles il existe des fonctions de Bloch solution des équations de Maxwell dans le cristal : nous appelons cet ensemble le domaine de transparence. Enfin, l'ensemble Δ_0 constitue la frontière entre le domaine interdit G et le domaine de transparence B .

4.2 Le domaine de transparence et le domaine interdit dans un cristal photonique monodimensionnel à la limite thermodynamique

Dans cette section 4.2, nous déterminons le domaine de transparence et le domaine interdit des cristaux photoniques monodimensionnels à la limite thermodynamique. Pour cela, nous étudions la convergence simple des coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u . Nous pourrions alors vérifier que les domaines de transparence et interdit établis à partir des deux différents modèles (cristal parfait et cristal à la limite thermodynamique) coïncident.

4.2.1 Limite simple des coefficients de transmission et de réflexion

Les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u se comportent différemment suivant que la variable α_1 se trouve dans le domaine interdit G ou dans le domaine de transparence B ; nous séparons ces deux cas.

Théorème 4.1 (i) *Dans le domaine interdit G , les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u convergent simplement. La limite de t_n^d est 0 et la limite de r_n^u est de module 1.*

$$\forall \alpha_1 \in G : \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^d(\alpha_1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^u(\alpha_1) = \frac{\beta^u(\alpha_1) - \beta_G(\alpha_1)}{\beta^u(\alpha_1) + \beta_G(\alpha_1)}, \quad (4.5)$$

où

$$\beta_G(\alpha_1) = -\frac{\sin \varphi(\alpha_1)}{T_{12}(\alpha_1)} - i \frac{T_{11}(\alpha_1) - T_{22}(\alpha_1)}{2T_{12}(\alpha_1)} \in i\mathbb{R}. \quad (4.6)$$

(ii) *Dans le domaine de transparence B , le coefficient de transmission t_n^d n'est jamais nul.*

$$\forall \alpha_1 \in B, \forall n \in \mathbb{N} : |t_n^d(\alpha_1)| \geq \frac{\beta^u(\alpha_1)}{q_c(\alpha_1) + |q_s(\alpha_1)| / \sin \varphi(\alpha_1)} > 0. \quad (4.7)$$

Preuve du théorème 4.1 (i) D'après la définition (4.4) du domaine interdit et la relation (3.52), la fonction φ est imaginaire pure: $\varphi(\alpha_1) = i|\varphi(\alpha_1)|$ pour tout $\alpha_1 \in G$. Alors, dans le domaine interdit,

$$\cos(n\phi) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (1/2) \exp(n|\varphi|) \quad \text{et} \quad \sin(n\phi) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (i/2) \exp(n|\varphi|). \quad (4.8)$$

Nous remplaçons les fonctions $\cos(n\phi)$ et $\sin(n\phi)$ par leur équivalent (4.8) dans l'expression (3.55) des coefficients t_n^d et r_n^u . Alors, dans le domaine interdit,

$$t_n^d \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\beta^u \exp(-n|\varphi|)}{q_c - q_s / \sin \varphi} \quad \text{et} \quad r_n^u \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p_c - p_s / \sin \varphi}{q_c - q_s / \sin \varphi}. \quad (4.9)$$

Cette dernière estimation montre que le coefficient de transmission t_n^d tend de façon exponentielle vers 0 quand le nombre de couches élémentaires n tend vers l'infini. Enfin, en utilisant la propriété (3.37) et la relation (3.52), on peut montrer que l'équivalent (4.9) est exactement l'expression (4.5) de la limite du coefficient de réflexion r_n^u .

Preuve du théorème 4.1 (ii) D'après la définition (4.4) du domaine de transparence et la relation (3.52), la fonction φ est réelle: $\varphi(\alpha_1) = |\varphi(\alpha_1)|$ pour tout $\alpha_1 \in B$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\cos(n\varphi)| \leq 1$ et $|\sin(n\varphi)| \leq 1$. Nous pouvons alors majorer le dénominateur du coefficient de transmission t_n^d dans le domaine interdit.

$$\forall n \in \mathbb{N} : |q_c \cos(n\varphi) + iq_s \sin(n\varphi) / \sin \varphi| \leq q_c + |q_s| / \sin \varphi. \quad (4.10)$$

Alors, d'après l'expression (3.55) du coefficient de transmission t_n^d , nous pouvons conclure que le module de celui-ci est majoré par la fonction strictement positive (4.7) indépendante du nombre n de couches élémentaires.

Le théorème 4.1 nous indique que les deux modèles (cristal parfait et cristal à la limite thermodynamique) que nous utilisons donnent des résultats cohérents.

Dans le domaine interdit, il n'existe pas de fonction de Bloch solution des équations de Maxwell dans le cristal; nous pouvons en déduire que le champ électromagnétique ne peut pas se propager à l'intérieur du cristal. Nous imaginons que si nous éclairons le cristal par un champ incident, alors, ne pouvant pénétrer dans le cristal, ce champ sera totalement réfléchi: le cristal se comporte comme un miroir parfait. C'est exactement ce que nous indique le théorème 4.1 (i): la limite du coefficient de transmission est nulle et la limite du coefficient de réflexion est de module 1.

Dans le domaine de transparence, il existe des fonctions de Bloch solution des équations de Maxwell. Le champ électromagnétique peut se propager à l'intérieur du cristal: le cristal photonique se comporte comme un milieu transparent. Le théorème 4.1 (ii) va également dans ce sens; le coefficient de transmission est majoré par une fonction strictement positive indépendante du nombre n de couches élémentaires.

Le théorème 4.1 nous indique que, dans le domaine interdit, l'expression du coefficient de réflexion limite (4.5) ne dépend pas des paramètres du substrat. Cela n'est pas étonnant puisque, dans le domaine interdit, le champ électromagnétique est principalement localisé dans le superstrat et est nul dans le substrat: le substrat n'a aucune influence sur le champ électromagnétique.

Nous n'avons pas précisé le comportement des coefficients de transmission et de réflexion sur la frontière Δ_0 . Cette frontière se scinde en deux parties [49, 48]: une première partie entre dans le domaine interdit (le coefficient de transmission limite est nul) et la deuxième partie entre dans le domaine de transparence (le coefficient de transmission n'est jamais nul). Nous pouvons nous passer de l'étude de la frontière Δ_0 puisque cet ensemble est de mesure nulle.

$$|\Delta_0| = \int_{\Delta_0} d\alpha_1 = 0. \quad (4.11)$$

Nous justifions que l'ensemble Δ_0 est de mesure nulle. D'après la propriété 3.1, la matrice T (et donc la trace de matrice T) est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 . Alors, soit la trace de la matrice T est une des deux constantes ± 2 , soit la trace de la matrice T prend les valeurs ± 2 un nombre fini de fois dans le compact K_1 . La trace de la matrice T n'étant pas constante (en fonction de la variable α_1), l'ensemble Δ_0 est un ensemble fini de points: la frontière Δ_0 est donc de mesure nulle.

Enfin, il est clair que les coefficients de transmission et de réflexion ne possèdent pas de limite dans le domaine de transparence: les fonctions $\cos(n\varphi)$ et $\sin(n\varphi)$ qui interviennent dans leur expression (3.55) oscillent lorsque le nombre de couches élémentaires n tend vers l'infini. C'est pourquoi nous emploierons d'autres notions de convergence dans la suite de ce chapitre.

Dans la section 4.2.2 suivante nous illustrons ce théorème 4.1.

4.2.2 Illustration de la convergence simple des coefficients de transmission et de réflexion

Données numériques de la figure 4.1 Nous considérons le cas particulier de la couche élémentaire que nous avons définie dans la section 3.1. Le superstrat et le substrat ont les mêmes propriétés que le vide. Soient ε_0 la permittivité du vide et μ_0 la perméabilité du vide.

$$\varepsilon^u = \varepsilon^d = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu^u = \mu^d = \mu_0. \quad (4.12)$$

Les valeurs numériques des constantes diélectriques ε_1 et ε_2 des deux strates homogènes qui constituent la couche élémentaire sont

$$\varepsilon_1/\varepsilon_0 = (1.45)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2/\varepsilon_0 = (2.25)^2. \quad (4.13)$$

Nous avons choisi le premier indice diélectrique proche de celui du SiO_2 (environ 1.45 dans le domaine de l'optique et du proche infrarouge) et le deuxième indice diélectrique proche de celui du Ta_2O_5 (environ 2.25 dans le domaine de l'optique et du proche infrarouge). Ces matériaux ont des pertes négligeables dans le domaine de l'optique et du proche infrarouge et sont couramment utilisés dans la fabrication des cristaux photoniques monodimensionnels [58, 59]. Les deux strates ont même épaisseur optique:

$$h\sqrt{\varepsilon_1} = (h_3 - h)\sqrt{\varepsilon_2} \iff h = h_3\sqrt{\varepsilon_2}/(\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}). \quad (4.14)$$

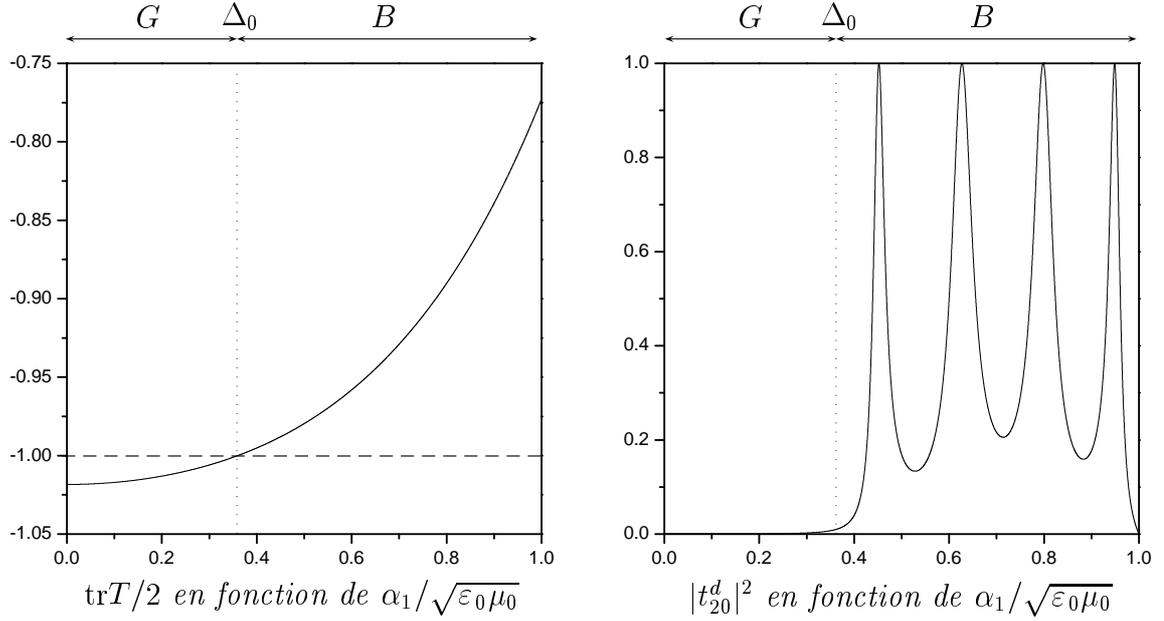


FIG. 4.1: Illustration du théorème 4.1. Nous avons représenté sur la figure de gauche la fonction $\text{tr}T/2$ qui permet de définir les domaines interdit G et de transparence B . Nous avons représenté sur la figure de droite le carré du module du coefficient de transmission à travers un cristal constitué de $n = 20$ couches élémentaires.

Nous utiliserons toujours ces valeurs numériques pour la couche élémentaire dans toute cette deuxième partie. Enfin, la valeur numérique de la fréquence et la polarisation (3.11) du champ sont

$$2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 3.96 \quad \text{et} \quad H_{\omega,2} = 0 \quad (\text{polarisation TE}). \quad (4.15)$$

L'inverse de la fréquence normalisée, $2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})$, est égal au rapport de la longueur d'onde sur l'épaisseur h_3 de la couche élémentaire.

Exemple numérique Nous avons représenté sur la figure 4.1 les fonctions $\text{tr}T/2$ (à gauche) et $|t_{20}^d|^2$ (à droite) en fonction de la variable normalisée $\alpha_1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Cette figure 4.1 illustre le résultat du théorème 4.1 pour un cristal constitué de $n = 20$ couches élémentaires : le carré du module du coefficient de transmission t_{20} est très proche de zéro dans le domaine interdit G et oscille sans jamais s'annuler dans le domaine de transparence B .

4.3 Lemme fondamental

Dans cette section nous énonçons le lemme sur lequel repose l'ensemble des résultats que nous allons montrer dans la suite de ce chapitre. La preuve de ce lemme est reportée dans l'annexe A. Nous énoncerons ensuite une conséquence de ce lemme que nous utiliserons également.

Nous commençons par définir des fonctions t et r en rapport avec les coefficients de réflexion et de transmission. Soient pour tout $(v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times K_1$:

$$\begin{aligned} t(v, \alpha_1) &= \frac{\beta^u(\alpha_1)}{q_c(\alpha_1) \cos v + iq_s(\alpha_1) \sin v / \sin \varphi(\alpha_1)}, \\ r(v, \alpha_1) &= \frac{p_c(\alpha_1) \cos v + ip_s(\alpha_1) \sin v / \sin \varphi(\alpha_1)}{q_c(\alpha_1) \cos v + iq_s(\alpha_1) \sin v / \sin \varphi(\alpha_1)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'expression des coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u en fonction de t et r est : $t_n^d(\alpha_1) = t[n\varphi(\alpha_1), \alpha_1]$ et $r_n^u(\alpha_1) = r[n\varphi(\alpha_1), \alpha_1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha_1 \in K_1$. Soient Ω_t et Ω_r des domaines du plan complexe qui contiennent les images des fonctions t et r . Soit $\|\beta^u/\beta^d\|_\infty$ la norme uniforme de β^u/β^d . Alors,

$$\forall (v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times K_1 : t(v, \alpha_1) \in \Omega_t = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \leq 2\|\beta^u/\beta^d\|_\infty\}. \quad (4.17)$$

$$\forall (v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times K_1 : r(v, \alpha_1) \in \Omega_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \leq 1\}.$$

Nous montrons que les domaines Ω_t et Ω_r contiennent les images des fonctions t et r . Nous ne pouvons pas utiliser la propriété 3.4 (conséquence (3.57) de la conservation du flux de Poynting sur les coefficients t_n^d et r_n^u). Nous devons donc majorer directement les fonctions t et r à partir des expressions (3.52,3.56) des fonctions φ, p_c, p_s, q_c et q_s et de la propriété 3.2 (conséquence (3.37) de la conservation du flux de Poynting sur la matrice T).

Pour tout $(v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times K_1 : t(v, \alpha_1) \in \Omega_t$. **Preuve** D'après l'expression (4.16) de la fonction t ,

$$|t|^2 \leq 2\beta^u/\beta^d \iff \forall v \in [0, 2\pi] : 2\beta^u\beta^d \leq 4|q_c \cos v + iq_s \sin v / \sin \varphi|^2.$$

Nous développons le membre de droite de cette inégalité et nous remplaçons les fonctions p_c, p_s, q_c et q_s par leur expression (3.56). Alors,

$$\begin{aligned} |t|^2 \leq 2\beta^u/\beta^d &\iff \forall v \in [0, 2\pi] : 2\beta^u\beta^d \\ &\leq (\beta^u)^2 \{\cos v - [(T_{11} - T_{22})/2] \sin v / \sin \varphi\}^2 \\ &\quad + (\beta^d)^2 \{\cos v + [(T_{11} - T_{22})/2] \sin v / \sin \varphi\}^2 \\ &\quad + 2\beta^u\beta^d \{\cos^2 v - [(T_{11} - T_{22})^2/4 + T_{12}T_{21}] \sin^2 v / \sin^2 \varphi\}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du membre de droite de l'inégalité sont toujours positifs : nous pouvons donc les éliminer. Nous remplaçons $\cos^2 v$ par $1 - \sin^2 v$ et $\sin^2 \varphi$ par son expression (3.52). Alors, après avoir divisé par la fonction strictement positive $2\beta^u\beta^d$, nous obtenons

$$|t|^2 \leq 2\beta^u/\beta^d \iff \forall v \in [0, 2\pi] : 1 \leq 1 - (1 - T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21}) \sin^2 v / \sin^2 \varphi.$$

Enfin, d'après la propriété 3.1, $\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$. Alors nous obtenons que $|t|^2 \leq 2\beta^u/\beta^d \iff 1 \leq 1$, ce qui est toujours vrai. Nous avons montré que l'image de la fonction t est contenue dans Ω_t .

Pour tout $(v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times K_1 : r(v, \alpha_1) \in \Omega_r$. **Preuve** D'après l'expression (4.16) de la fonction r ,

$$\begin{aligned} |r|^2 \leq 1 &\iff \forall v \in [0, 2\pi] : |p_c \cos v + ip_s \sin v / \sin \varphi|^2 \\ &\leq |q_c \cos v + iq_s \sin v / \sin \varphi|^2. \end{aligned}$$

Nous développons les deux membres de cette inégalité. Nous remplaçons les fonctions p_c, p_s, q_c et q_s par leur expression (3.56) puis nous éliminons les termes qui se simplifient de part et d'autre de l'inégalité. Enfin, nous regroupons l'ensemble des termes dans le premier membre de l'inégalité. Après avoir divisé par la fonction strictement positive $\beta^u \beta^d$, nous obtenons

$$|r|^2 \leq 1 \iff \forall v \in [0, 2\pi] : -\cos^2 v + [(T_{11} - T_{22})^2/4 + T_{12}T_{21}] \sin^2 v / \sin^2 \varphi \leq 0.$$

Nous remplaçons $\cos^2 v$ par $1 - \sin^2 v$ et nous utilisons l'expression (3.52) de $\sin^2 \varphi$. Alors,

$$|r|^2 \leq 1 \iff \forall v \in [0, 2\pi] : -1 + (1 - T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21}) \sin^2 v / \sin^2 \varphi \leq 0.$$

Enfin, d'après la propriété 3.1, $\det T = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$. Alors nous obtenons que $|r|^2 \leq 1 \iff -1 \leq 0$, ce qui est toujours vrai. Nous avons montré que l'image de la fonction r est contenue dans Ω_r .

Nous pouvons maintenant donner l'énoncé du lemme fondamental.

Lemme fondamental Soient f de $\Omega_t \times \Omega_r$ dans \mathbb{C} et g de B dans \mathbb{C} des fonctions continûment dérivables. Soient $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$ les normes uniformes des fonctions f et g et de leurs dérivées. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty)$ tel que : $n \geq n_\epsilon(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty) \implies$

$$\left| \int_B g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 - \int_B g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \leq \epsilon, \quad (4.18)$$

avec

$$\forall \alpha_1 \in B : f_\infty(\alpha_1) = (2\pi)^{-1} \int_{[0, 2\pi]} f[t(v, \alpha_1), r(v, \alpha_1)] dv. \quad (4.19)$$

Nous souhaitons préciser ce que nous entendons par "la fonction f est continûment dérivable". La fonction f est continûment dérivable si ses dérivées partielles par rapport aux quatre variables réelles $\Re(t), \Im(t), \Re(r)$ et $\Im(r)$ existent et sont continues. En particulier, les fonctions $(t, r) \mapsto \bar{t}$ et $(t, r) \mapsto \bar{r}$ entrent dans le cadre du lemme.

Nous avons souhaité préciser que l'entier n_ϵ dépend des normes uniformes $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$. En effet, cet énoncé, que nous pouvons qualifier de "primitif", sera nécessaire pour déterminer avec précision la limite uniforme du champ diffracté. Nous énonçons immédiatement une conséquence de ce lemme.

Conséquence du lemme fondamental Soient f une fonction continûment dérivable de $\Omega_t \times \Omega_r$ dans \mathbb{C} et g une fonction de carré sommable de B dans \mathbb{C} . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 = \int_B g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1. \quad (4.20)$$

Preuve de la conséquence du lemme fondamental La fonction g étant de carré sommable sur l'ensemble borné B , elle est aussi sommable sur B . Nous pouvons alors approcher la fonction g par une fonction continûment dérivable au sens de la norme des fonctions sommables sur B . Soit, pour tout $\eta > 0$, la fonction g_η continûment dérivable qui vérifie

$$\int_B |g_\eta(\alpha_1) - g(\alpha_1)| d\alpha_1 \leq \eta.$$

D'après les hypothèses du lemme, la fonction f est uniformément bornée. Alors, si nous choisissons $\eta = \epsilon / \|f\|_\infty$,

$$\left| \int_B g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 - \int_B g_\eta(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 \right| \leq \epsilon. \quad (4.21)$$

Nous pouvons alors utiliser le résultat du lemme fondamental avec la fonction continûment dérivable g_η . Il existe n_ϵ tel que $n > n_\epsilon \implies$

$$\left| \int_B g_\eta(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 - \int_B g_\eta(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \leq \epsilon. \quad (4.22)$$

Enfin, d'après sa définition (4.19), la fonction f_∞ est de même que la fonction f uniformément bornée par $\|f\|_\infty$. Alors,

$$\left| \int_B g_\eta(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 - \int_B g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \leq \|f\|_\infty \eta = \epsilon. \quad (4.23)$$

Il suffit alors d'utiliser les trois inégalités (4.21,4.22,4.23) pour obtenir la preuve de la conséquence (4.20).

4.4 Le champ diffracté à la limite thermodynamique

Dans cette section 4.4, nous déterminons la limite quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini du champ diffracté par le cristal photonique monodimensionnel.

D'après les hypothèses (3.17,3.18) que nous avons faites sur le champ électromagnétique, les fonctions U_n^t et U_n^r sont uniformément bornées (par rapport aux variables $x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \leq -nh_3$ pour U_n^t et par rapport aux variables $x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0$ pour U_n^r). La convergence en norme uniforme semble alors la notion de convergence la mieux adaptée. Seulement, nous ne pouvons pas montrer la convergence uniforme des fonctions U_n^t et U_n^r ; nous montrerons que les fonctions U_n^t et U_n^r convergent uniformément sur tout compact.

Nous analyserons alors notre résultat. Nous commencerons par examiner le flux du vecteur de Poynting de la limite uniforme sur tout compact du champ diffracté. Ensuite, nous interpréterons physiquement la limite uniforme sur tout compact du champ réfléchi: nous définirons le coefficient de réflexion sur les interfaces planes

séparant le cristal du milieu extérieur par analogie avec le coefficient de réflexion de Fresnel sur un dioptre plan.

Enfin, nous étudierons la limite en moyenne quadratique des fonctions U_n^t et U_n^r : nous montrerons que le champ diffracté par le cristal ne possède pas de limite quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini.

4.4.1 Limite uniforme sur tout compact du champ diffracté

Dans notre formulation, le superstrat est clairement défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le superstrat est le demi-plan supérieur : $\{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0\}$) et le substrat est mobile. Une formulation analogue pourrait permettre de définir clairement le substrat pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, si nous plaçons le cristal dans le demi-plan supérieur, le substrat est alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ le demi-plan inférieur : $\{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0\}$. Nous supposons dans cette section 4.4.1 que le superstrat et le substrat sont correctement définis.

Soit $\|\cdot\|_{\infty, X}$ la norme uniforme dans l'ensemble des fonctions bornées sur le compact $X \subset \mathbb{R}^2$. Alors, pour toute fonction V bornée sur le compact $X \subset \mathbb{R}^2$,

$$\|V\|_{\infty, X} = \sup \{|V(x_1, x_3)| \mid (x_1, x_3) \in X\}. \quad (4.24)$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat sur la convergence uniforme du champ diffracté.

Théorème 4.2 *Les fonctions U_n^t et U_n^r représentant le champ diffracté convergent uniformément sur tout compact. La fonction U_n^t converge vers la fonction nulle et la fonction U_n^r converge vers une fonction que nous notons U^r . Pour tout compact X^d inclus dans le substrat et pour tout compact X^u inclus dans le superstrat :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n^t\|_{\infty, X^d} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n^r - U^r\|_{\infty, X^u} = 0, \quad (4.25)$$

où pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_3 \geq 0$:

$$U^r(x_1, x_3) = \int_{K_1} A(\alpha_1) r^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1, \quad (4.26)$$

avec

$$r^u = \frac{\beta^u - \beta}{\beta^u + \beta}, \quad (4.27)$$

où

$$\begin{aligned} \forall \alpha_1 \in G : \beta(\alpha_1) = \beta_G(\alpha_1) &= \frac{\sin \varphi(\alpha_1)}{T_{12}(\alpha_1)} - i \frac{T_{11}(\alpha_1) - T_{22}(\alpha_1)}{2T_{12}(\alpha_1)}, \\ \forall \alpha_1 \in B : \beta(\alpha_1) = \beta_B(\alpha_1) &= \frac{\sin \varphi(\alpha_1)}{|T_{12}(\alpha_1)|} - i \frac{T_{11}(\alpha_1) - T_{22}(\alpha_1)}{2T_{12}(\alpha_1)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Preuve du théorème 4.2 La méthode est identique pour démontrer la convergence des fonctions U_n^t et U_n^r . Nous donnons une preuve du théorème 4.2 pour la fonction U_n^r . Nous séparons la partie de la fonction U_n^r dans le domaine interdit G de la partie dans le domaine de transparence B . D'après l'expression (3.62), pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_3 \geq 0$:

$$U_n^r(x_1, x_3) = \int_G A(\alpha_1) r_n^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1 \quad (4.29a)$$

$$+ \int_B A(\alpha_1) r_n^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1. \quad (4.29b)$$

Convergence de la partie de la fonction U_n^r dans le domaine interdit G Nous utilisons le théorème 4.1. Le module de la fonction de la variable α_1 se trouvant sous le symbole intégrale (4.29a) est majoré par $|A(\alpha_1)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après (3.47), l'amplitude A est de carré sommable sur l'ensemble borné G . Alors, l'amplitude A est aussi sommable sur G et nous pouvons utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G A(\alpha_1) r_n^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1 \\ &= \int_G A(\alpha_1) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^u(\alpha_1) \right] \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1. \end{aligned}$$

Nous utilisons le résultat (4.5) du théorème 4.1. Nous obtenons alors exactement l'expression (4.26) de la partie de la fonction U^r dans le domaine interdit G .

Convergence de la partie de la fonction U_n^r dans le domaine de transparence B Nous utilisons le lemme de la section 4.3. D'après (3.47), l'amplitude A est de carré sommable sur l'ensemble borné B . Alors, l'amplitude A est aussi sommable sur B et nous pouvons l'approcher par une fonction continûment dérivable au sens de la norme des fonctions sommables sur G . Soit, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction A_ϵ continûment dérivable qui vérifie

$$\int_B |A_\epsilon(\alpha_1) - A(\alpha_1)| d\alpha_1 \leq \epsilon. \quad (4.30)$$

Soient g et g_ϵ les fonctions définies pour tout $\epsilon > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \geq 0$, $\alpha_1 \in B$:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_3, \alpha_1) &= A(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\}, \\ g_\epsilon(x_1, x_3, \alpha_1) &= A_\epsilon(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

La fonction $g_\epsilon(x_1, x_2, \cdot)$ est, de même que la fonction A_ϵ , continûment dérivable. Nous pouvons alors reproduire à l'identique le raisonnement de la section 4.3 pour prouver la conséquence (4.20) du lemme fondamental. Nous utilisons les trois inégalités (4.21, 4.22, 4.23) où nous avons remplacé les fonctions g et g_n par les fonctions $g(x_1, x_2, \cdot)$ et $g_\epsilon(x_1, x_2, \cdot)$. Alors, il existe n_ϵ tel que $n > n_\epsilon \implies$

$$\left| \int_B g(x_1, x_2, \alpha_1) r_n^u(\alpha_1) d\alpha_1 - \int_B g(x_1, x_2, \alpha_1) r^u(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \leq 3\epsilon, \quad (4.32)$$

où nous avons utilisé le résultat (B.14) établi dans la section B.2 de l'annexe B et la définition (4.27) de la fonction r^u . Le lemme fondamental nous indique que l'entier n_ϵ dé-

pend de la norme uniforme de la fonction $g_\epsilon(x_1, x_2, \cdot)$ et de sa dérivée par rapport à la variable α_1 , $(\partial g_\epsilon / \partial \alpha_1)(x_1, x_2, \cdot)$. D'après l'expression (4.31) de la fonction g_ϵ , pour tout $\epsilon > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \geq 0$, $\alpha_1 \in B$:

$$|(\partial g_\epsilon / \partial \alpha_1)(x_1, x_2, \alpha_1)| = |A'_\epsilon(\alpha_1) + A_\epsilon(\alpha_1)\{i\omega[x_1 + (d\alpha_3^u / d\alpha_1)(\alpha_1)x_3]\}|. \quad (4.33)$$

Soient $\|A_\epsilon\|_\infty$, $\|A'_\epsilon\|_\infty$ et $\|d\alpha_3^u / d\alpha_1\|_\infty$ les normes uniformes des fonctions A_ϵ , A'_ϵ et $d\alpha_3^u / d\alpha_1$. Alors, nous pouvons majorer $\|(\partial g_\epsilon / \partial \alpha_1)(x_1, x_2, \cdot)\|_\infty$, la norme uniforme de la fonction $(\partial g_\epsilon / \partial \alpha_1)(x_1, x_2, \cdot)$. D'après (4.33), pour tout $\epsilon > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 \geq 0$:

$$\|(\partial g_\epsilon / \partial \alpha_1)(x_1, x_2, \cdot)\|_\infty \leq \|A'_\epsilon\|_\infty + \omega x_1 \|A_\epsilon\|_\infty + \omega x_3 \|A_\epsilon\|_\infty \|d\alpha_3^u / d\alpha_1\|_\infty. \quad (4.34)$$

Soit X^u un compact inclus dans le superstrat. Alors, d'après (4.34), nous pouvons majorer la norme uniforme $\|(\partial g_\epsilon / \partial \alpha_1)(x_1, x_2, \cdot)\|_\infty$ indépendamment de $(x_1, x_3) \in X^u$. Dans ce cas, l'entier n_ϵ est indépendant de $(x_1, x_3) \in X^u$. Alors, d'après (4.32), $n > n_\epsilon \implies$

$$\left\| \int_B g(x_1, x_2, \alpha_1) r_n^u(\alpha_1) d\alpha_1 - \int_B g(x_1, x_3, \alpha_1) r_n^u(\alpha_1) d\alpha_1 \right\|_{\infty, X^u} \leq 3\epsilon. \quad (4.35)$$

Nous avons montré la convergence uniforme sur tout compact X^u inclus dans le superstrat de la partie de la fonction U^r dans le domaine de transparence B .

Le résultat de notre théorème 4.2 est incomplet : nous avons montré que le champ diffracté converge uniformément sur tout compact. Nous ne pouvons pas montrer la convergence uniforme des fonctions U_n^t et U_n^r . En effet, avec notre méthode, ce résultat exigerait de contrôler les variations des fonctions comme $\alpha_1 \mapsto \exp(i\omega\alpha_1 x_1)$ ou $\alpha_1 \mapsto \exp[i\omega\alpha_3^u(\alpha_1)x_3]$. Or, les variations de ces fonctions sont proportionnelles à x_1 et à x_3 : nous ne pouvons pas contrôler ces variations quand x_1 ou x_3 tend vers l'infini. Deux raisons peuvent expliquer ce résultat incomplet.

Une première raison, extrinsèque à notre modèle, aurait une origine technique. Dans ce cas, la méthode que nous avons utilisée dans l'annexe A pour prouver la convergence des fonctions U_n^t et U_n^r ne serait pas assez fine.

Une deuxième raison, intrinsèque à notre modèle, aurait une origine physique. Dans ce cas, notre modélisation ne serait pas adaptée dans le sens où il serait impossible de prouver la convergence uniforme des fonctions U_n^t et U_n^r . L'interprétation physique du théorème 4.2 que nous réalisons dans la section 4.4.2 suivante va dans ce sens. C'est pourquoi nous étudions la convergence en moyenne quadratique des fonctions U_n^t et U_n^r dans la section 4.4.4.

4.4.2 Interprétation physique du flux du vecteur de Poynting de la limite uniforme du champ diffracté

Dans cette section nous interprétons physiquement le résultat du théorème 4.2. Nous concluons en particulier que le résultat de ce théorème ne nous permet pas de caractériser complètement les propriétés du champ diffracté par le cristal.

La conservation du flux du vecteur de Poynting implique que les coefficients de transmission t_n^d et de réflexion r_n^u vérifient la relation (3.57) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il semble alors raisonnable d'exiger que la limite de ces coefficients que nous avons

obtenue vérifient également cette relation.

Le flux du vecteur de Poynting dans le domaine interdit Nous avons déjà vu que, dans le domaine interdit G , la partie réelle de la fonction β_G (4.28) est nulle. Alors, le carré du module de la limite (4.27) du coefficient de réflexion est égal à 1. La limite (4.25) du coefficient de transmission étant nulle, la conséquence (3.57) de la conservation du flux du vecteur de Poynting est vérifiée à la limite thermodynamique.

$$\forall \alpha_1 \in G : \Re[\beta(\alpha_1)] = \Re[\beta_G(\alpha_1)] = 0 \implies 0 + |r^u(\alpha_1)|^2 = 1. \quad (4.36)$$

Le flux du vecteur de Poynting dans le domaine de transparence Dans le domaine de transparence B , la partie réelle de la fonction β_B (4.28) est strictement positive. Alors, le carré du module de la limite (4.27) du coefficient de réflexion est strictement inférieur à 1. La limite (4.25) du coefficient de transmission étant nulle, la conséquence (3.57) de la conservation du flux du vecteur de Poynting n'est pas vérifiée à la limite thermodynamique.

$$\forall \alpha_1 \in B : \Re[\beta(\alpha_1)] = \Re[\beta_B(\alpha_1)] > 0 \implies 0 + |r^u(\alpha_1)|^2 < 1. \quad (4.37)$$

Interprétation physique Cette dernière remarque nous incite à penser que la limite du champ électromagnétique que nous avons obtenue avec le théorème 4.2 ne contient pas la totalité du champ électromagnétique diffracté par le cristal.

Nous avons représenté sur la figure 4.2 un exemple qui vise à illustrer de façon qualitative ce phénomène ; seule l'allure générale du champ présente un intérêt dans cette section (les valeurs numériques des différents paramètres sont identiques à celles de la section 4.5.4) : nous pouvons remarquer sur la figure 4.2 de droite la présence d'interférences (ou phénomène de battement) à l'intérieur du cristal ; nous n'avons pas déterminé la cause (physique ou numérique) de ce phénomène que nous observerons dans toutes les illustrations de ce chapitre 4. Nous avons représenté sur la figure 4.2 à gauche le champ réfléchi dans le compact X^u inclus dans le superstrat. Le nombre de couches élémentaires est suffisamment grand ($n = 1000$) pour permettre au champ réfléchi de converger dans le compact X^u . Nous avons représentée sur la figure 4.2 à droite le même champ électromagnétique en présence du même cristal mais à une échelle deux fois plus petite. Nous nous apercevons alors que le champ réfléchi ne se réduit pas à la partie que nous avons représenté sur la figure 4.2 à gauche : le champ réfléchi comporte une partie supplémentaire qui, d'après la figure 4.2 à droite, semble s'éloigner du compact X^u en même temps que l'épaisseur du cristal (ou le nombre n de couches élémentaires) augmente. Tout indique que cette partie supplémentaire "mobile" du champ réfléchi est repoussée à l'infini quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini. Alors, quelque soit le compact inclus dans le superstrat que nous choisissons, il existe un nombre n de couches élémentaires suffisamment grand tel que cette partie supplémentaire "mobile" se trouve à l'extérieur du compact. Cette partie supplémentaire "mobile" échappe donc systématiquement à U^r , la limite uniforme sur tout compact de U_n^r .

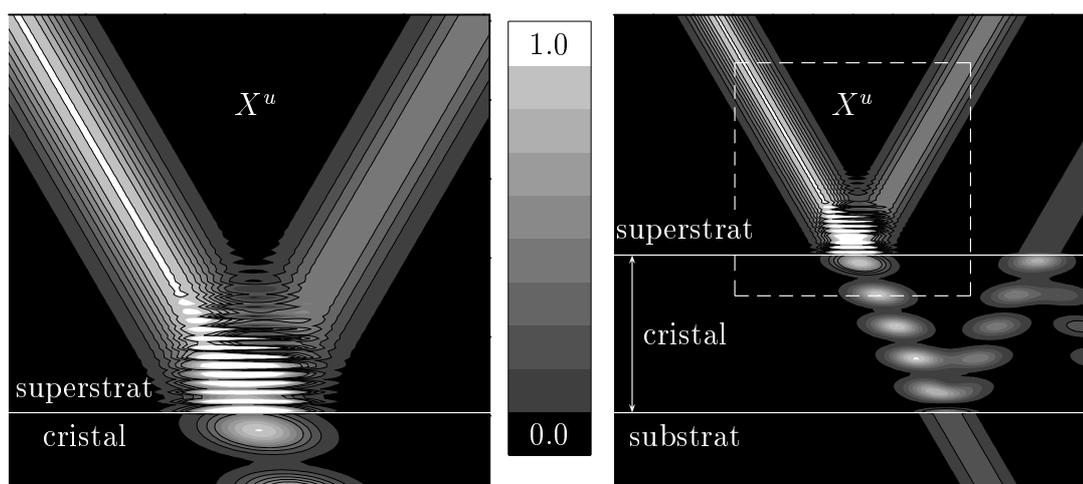


FIG. 4.2: Illustration du théorème 4.2. Nous avons représenté sur la figure de gauche le carré du module de la fonction U dans une partie du cristal et dans le domaine compact X^u inclus dans le superstrat. Nous avons représenté sur la figure de droite le carré du module de la même fonction U en présence du même cristal avec une échelle deux fois plus petite. Le cadre en pointillés sur la figure de droite correspond à la figure de gauche. L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction U^i représentant le champ incident.

C'est certainement cette partie manquante qui explique la non-conservation (4.37) du flux du vecteur de Poynting. Enfin, cette partie supplémentaire "mobile" peut expliquer la difficulté de montrer la convergence uniforme de la fonction U_n^r dans tout le superstrat.

L'étude que nous réalisons peut être reproduite à l'identique en considérant un champ électromagnétique dépendant du temps. Nous mentionnons cette analogie parce que nous pensons que considérer un champ électromagnétique dépendant du temps est plus intuitif. Une étude identique montrerait la convergence uniforme sur tout compact du champ électromagnétique diffracté par le cristal. Choisir un compact consiste alors à considérer un intervalle de temps $[0, \tau]$.

Imaginons qu'une impulsion de lumière frappe l'interface plane séparant le superstrat du cristal à l'instant initial. Cette impulsion de lumière va se séparer en deux : une première partie sera réfléchiée dans le superstrat et une deuxième partie sera transmise dans le cristal. Il apparaît alors clairement que si le cristal est suffisamment épais (si l'épaisseur du cristal est supérieure au produit de la vitesse de la lumière dans le cristal avec le temps τ), la partie de l'impulsion de lumière transmise dans le cristal ne pourra pas atteindre l'interface plane séparant le cristal du substrat dans l'intervalle de temps $[0, \tau]$. Le champ transmis est alors nul et le champ réfléchi se réduit à la partie de l'impulsion de lumière réfléchiée à l'instant initial : ce champ transmis nul et ce champ réfléchi représentent la limite uniforme sur le compact $[0, \tau]$ du champ diffracté. Cette limite uniforme sur le compact $[0, \tau]$

du champ diffracté est en accord avec le résultat (4.25) du théorème 4.2.

Surtout, nous pouvons justifier physiquement que le champ diffracté ne peut pas converger uniformément par rapport au temps. Pour cela nous supposons que le champ diffracté converge uniformément par rapport au temps puis nous montrons qu'il y a une contradiction. Nous considérons dans un premier temps un cristal suffisamment épais pour que le champ diffracté soit proche de sa limite. L'épaisseur du cristal étant fixée, le champ transmis n'est pas nul au bout d'un certain temps τ (supérieur au rapport de l'épaisseur du cristal sur la vitesse de la lumière dans le cristal). Alors, la limite du champ transmis est non-nulle à l'instant τ . Or, si nous considérons maintenant un cristal plus épais (dont l'épaisseur est supérieure au produit de la vitesse de la lumière dans le cristal avec le temps τ), alors le champ transmis à travers ce cristal est nul à l'instant τ : la limite du champ transmis est donc à la fois nulle et non-nulle à l'instant τ , d'où la contradiction.

Cette analogie avec un champ électromagnétique dépendant du temps confirme l'hypothèse que le champ diffracté par le cristal ne converge pas uniformément dans le superstrat et le substrat.

Enfin, d'après (4.36), la conservation du flux du vecteur de Poynting est vérifiée dans le domaine interdit G . En effet, dans ce cas, notre raisonnement physique n'est plus valable puisqu'il n'y a plus de partie transmise du champ électromagnétique dans le cristal. Surtout, une lecture attentive de la preuve du théorème 4.2 permet de remarquer que la partie (4.29a) de la fonction U_n^r dans le domaine interdit G converge uniformément dans le superstrat vers la fonction U^r . Cette remarque nous incite à supposer que si la partie (4.29b) de la fonction U_n^r dans le domaine de transparence B convergeait uniformément dans le superstrat, alors la conservation du flux du vecteur de Poynting serait vérifiée dans le domaine de transparence B .

Conclusion Toutes ces remarques confirment l'hypothèse que la limite du champ diffracté que nous avons obtenue ne contient pas la totalité du champ diffracté. Nous concluons alors que la limite uniforme sur tout compact du champ diffracté ne permet pas de caractériser toutes les propriétés de celui-ci. Nous devons donc compléter notre étude.

4.4.3 Interprétation physique de la limite du coefficient de réflexion

Analogie avec le coefficient de réflexion de Fresnel L'expression (4.27) de la limite r^u du coefficient de réflexion que nous avons donnée est analogue à celle du coefficient de réflexion de Fresnel sur un dioptre plan (nous entendons par dioptre plan l'interface plane séparant deux milieux homogènes remplissant chacun un demi-espace). Surtout, dans le cas particulier où la couche élémentaire est constituée d'une unique strate homogène, l'expression (4.27) de r^u coïncide exactement avec l'expression du coefficient de réflexion de Fresnel sur le dioptre plan séparant le superstrat du milieu homogène constituant le cristal. Soient $\varepsilon_1 > 0$ et $\mu_1 > 0$ deux constantes réelles positives et $\nu_1 = \mu_1$ en polarisation TE ou $\nu_1 = \varepsilon_1$ en polarisation

TM. Alors, d'après (4.27),

$$\varepsilon(x_3) = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \mu(x_3) = \mu_1 \quad \forall x_3 \in [-h_3, 0] \implies r^u = \frac{\beta^u - \beta_1}{\beta^u + \beta_1}, \quad (4.38)$$

où

$$\forall \alpha_1 \in K_1 : \beta_1(\alpha_1) = \omega \nu_1^{-1} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \alpha_1^2}. \quad (4.39)$$

C'est pourquoi nous pensons que la limite (4.27) du coefficient de réflexion peut être interprétée comme le coefficient de réflexion sur l'interface plane séparant le superstrat et le cristal semi-infini remplissant le demi-espace inférieur. Cette interprétation utilise le fait remarquable que l'expression (4.27) de r^u est indépendante des paramètres du substrat. Nous pensons en effet que cette circonstance n'est pas évidente puisque, dans la bande de transparence, le champ électromagnétique n'est pas nul dans le substrat. Enfin, d'après (4.36,4.37), cette interprétation possède l'avantage supplémentaire de rendre compte de la présence du domaine interdit et du domaine de transparence.

Dans la suite de cette section 4.4.4, nous déterminons l'expression de la limite du coefficient de réflexion sur l'interface plane séparant le substrat et le cristal. Ce coefficient de réflexion nous permettra de préciser la pertinence de cette analogie.

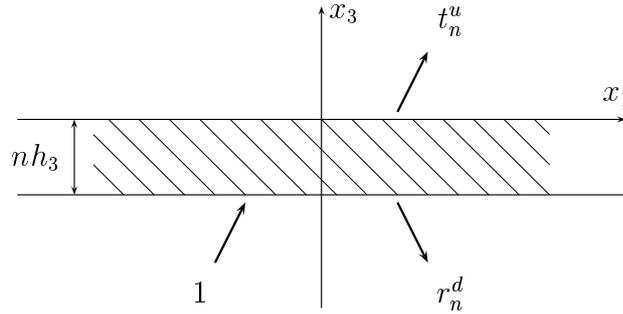


FIG. 4.3: Représentation du coefficient de réflexion sur l'interface plane séparant le substrat du cristal.

Expression du coefficient de réflexion sur l'interface plane séparant le superstrat et le cristal Nous avons défini le coefficient de réflexion dans le superstrat r_n^u lorsque nous avons imposé la condition d'onde sortante aux limites du cristal dans la section 3.4. Nous supposons ici que les sources qui créent le champ incident sont situées dans le substrat (figure 4.3). Alors, de même que dans la section 3.4, le champ diffracté se compose d'une partie réfléchi et d'une partie transmise (figure 4.3). Le champ réfléchi dans le substrat est déterminé par le coefficient de réflexion r_n^d . De même que pour le coefficient r_n^u , nous déterminons la limite du coefficient r_n^d quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini. Soit r^d cette limite. Alors,

$$r^d = \frac{\beta^d - \bar{\beta}}{\beta^d + \bar{\beta}}, \quad (4.40)$$

où la fonction β est définie par (4.28).

Preuve de l'égalité (4.40) L'expression des fonctions \widehat{U}_n^u et \widehat{U}_n^d qui représentent le champ total dans le superstrat et dans le substrat en présence du cristal constitué de n couches élémentaires est

$$\begin{aligned}\widehat{U}_n^u(\cdot, x_3) &= A t_n^u \exp[i\omega\alpha_3^u x_3] & \forall x_3 \geq 0, \\ \widehat{U}_n^u(\cdot, x_3) &= A \exp[i\omega\alpha_3^d(x_3 + nh_3)] + A r_n^d \exp[-i\omega\alpha_3^d(x_3 + nh_3)] & \forall x_3 \leq -nh_3.\end{aligned}$$

Alors, d'après la définition (3.20) du vecteur \widehat{F} , l'équation aux limites du cristal (3.29) devient

$$\begin{bmatrix} 1 + r_n^d \\ i\beta^d(1 - r_n^d) \end{bmatrix} = T^n \begin{bmatrix} t_n^u \\ i\beta^u t_n^u \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Nous utilisons l'expression (3.39) de la matrice T^{-1} . Alors l'équation (4.41) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} t_n^u \\ -i\beta^u t_n^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{22} & T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 + r_n^d \\ -i\beta^d(1 - r_n^d) \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Cette équation (4.42) est semblable à l'équation (3.50) si nous permutons à la fois les indices u et d d'une part et les coefficients T_{11} et T_{22} d'autre part. Nous pouvons alors utiliser directement le résultat (4.27) et nous obtenons l'expression (4.40) du coefficient r^d .

Incohérences dans l'interprétation physique de la limite du coefficient de réflexion L'expression (4.40) nous indique que la limite du coefficient de réflexion dans le substrat s'exprime également à partir de la fonction β . Pourtant, si nous comparons les expressions (4.27) et (4.40), nous remarquons que les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat n'ont pas la même influence sur le champ électromagnétique. Cette différence est due à la partie imaginaire de la fonction β . D'après l'expression (4.28) de la fonction β et la propriété (3.41) de la matrice T , la partie imaginaire de la fonction β s'annule si la couche élémentaire du cristal est symétrique par rapport à un plan horizontal (cette circonstance n'est pas étonnante puisque le cristal est alors lui-même symétrique par rapport à un plan horizontal). Mis à part ce cas particulier, les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat n'ont *a priori* pas la même influence sur le champ électromagnétique.

Cependant, nous pouvons remarquer que le module des coefficients r^u et r^d est indépendant du signe de la partie imaginaire de la fonction β .

$$\left| \frac{\beta^u - \beta}{\beta^u + \beta} \right| = \left| \frac{\beta^u - \overline{\beta}}{\beta^u + \overline{\beta}} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\beta^d - \beta}{\beta^d + \beta} \right| = \left| \frac{\beta^d - \overline{\beta}}{\beta^d + \overline{\beta}} \right|. \quad (4.43)$$

Ces relations nous indiquent que les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat ont la même influence en énergie sur le champ électromagnétique. Ces remarques indiquent que les coefficients de réflexion en énergie, $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$, sont

vraisemblablement les quantités qui permettent de décrire l'influence des interfaces planes séparant le milieu extérieur du cristal.

Nous pouvons donner d'autres raisons qui nous indiquent que les coefficients de réflexion complexes r^u et r^d ont vraisemblablement peu de sens physique. Premièrement, d'après (4.28), la partie imaginaire de la fonction β est en général non-nulle. Les limites (4.27,4.40) des coefficients de réflexion sont alors en général complexes dans la bande de transparence. Cette circonstance n'est pas satisfaisante physiquement puisque tous les matériaux que nous considérons sont sans pertes. En effet, le coefficient de réflexion de Fresnel d'un dioptre plan séparant deux milieux homogènes sans pertes, est réel quand il n'est pas de module 1. Deuxièmement, l'expression (4.26) inciterait à interpréter la fonction β comme une "constante de propagation dans le cristal". Seulement cette interprétation est fautive. En effet cette "constante de propagation" β n'a en général pas de rapport avec la composante k_3 du vecteur k .

Récapitulation L'expression (4.27) et la propriété (4.38) de la limite du coefficient de réflexion complexe incitent à interpréter celle-ci comme le coefficient de réflexion sur l'interface plane séparant le superstrat et le cristal semi-infini remplissant le demi-espace inférieur. Pourtant, cette interprétation conduit à des conclusions qui ne sont pas satisfaisantes physiquement.

Le carré du module de la limite du coefficient de réflexion complexe possède tous les avantages de celui-ci tout en évitant l'ensemble de ses incohérences. Nous pensons donc que les coefficients de réflexion en énergie, $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$, sont vraisemblablement les quantités qui permettent de décrire l'influence des interfaces planes séparant le milieu extérieur du cristal.

Tous les arguments que nous avons développés pour montrer l'incohérence de l'interprétation physique de la limite du coefficient de réflexion complexe ne sont plus valables dans au moins deux cas particuliers : dans le cas du dioptre plan (la couche élémentaire est une strate homogène) et dans le cas où la fréquence ω tend vers zéro (le cristal se comporte comme un milieu homogène anisotrope : c'est le cas du dioptre plan). Dans ces deux cas (au moins), la limite du coefficient de réflexion complexe peut être interprétée physiquement.

Enfin, cette interprétation nous incite à examiner la limite du module carré du coefficient de réflexion. C'est pourquoi nous étudions la limite en moyenne quadratique du champ diffracté dans la section suivante 4.4.4.

4.4.4 Limite en moyenne quadratique du champ diffracté

D'après l'hypothèse (3.13) que nous avons faite sur le champ électromagnétique, les fonctions $U_n^t(\cdot, x_3)$ et $U_n^r(\cdot, x_3)$ sont de carré sommable par rapport à la variable x_1 . De même que dans la section 4.4.1, la fonction $U_n^r(\cdot, x_3)$ est définie pour tout $x_3 \geq 0$ (le cristal est alors dans le demi-plan inférieur) et la fonction $U_n^t(\cdot, x_3)$ est définie pour tout $x_3 \leq 0$ (le cristal est alors dans le demi-plan supérieur). Soient

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ le produit scalaire et $\| \cdot \|_2$ la norme dans $L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C})$.

$$\forall V, V' \in L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C}) : \langle V, V' \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \overline{V(x_1)} V'(x_1) dx_1. \quad (4.44)$$

$$\forall V \in L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C}) : \|V\|_2^2 = \langle V, V \rangle_2. \quad (4.45)$$

La convergence simple (4.5) des coefficients de transmission et de réflexion implique que les parties (4.29a) des fonctions $U_n^t(\cdot, x_3)$ et $U_n^r(\cdot, x_3)$ dans le domaine interdit G convergent en moyenne quadratique pour tout x_3 où elles sont définies (la preuve de ce résultat est analogue à la première partie de la preuve du théorème 4.2). C'est pourquoi nous considérons les parties des fonctions $U_n^t(\cdot, x_3)$ et $U_n^r(\cdot, x_3)$ dans le domaine de transparence B . Soient $U_{B,n}^t(\cdot, x_3)$ et $U_{B,n}^r(\cdot, x_3)$ ces parties. Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0$:

$$U_{B,n}^t(x_1, x_3) = \int_B A(\alpha_1) t_n^d(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 - \alpha_3^d(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1, \quad (4.46)$$

et pour tout $x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0$:

$$U_{B,n}^r(x_1, x_3) = \int_B A(\alpha_1) r_n^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1. \quad (4.47)$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat sur la convergence en moyenne quadratique du champ diffracté.

Théorème 4.3 *Les fonctions $U_{B,n}^t(\cdot, x_3)$ et $U_{B,n}^r(\cdot, x_3)$ ne possèdent pas de limite en moyenne quadratique pour tout x_3 où elles sont définies (la convergence en moyenne quadratique étant la convergence associée à la norme (4.45)).*

Preuve du théorème 4.3 Nous supposons que les fonctions $U_{B,n}^t(\cdot, x_3)$ et $U_{B,n}^r(\cdot, x_3)$ possèdent une limite en moyenne quadratique puis nous montrons qu'il y a une contradiction. Soient $U_B^t(\cdot, x_3)$ et $U_B^r(\cdot, x_3)$ ces limites. D'après (4.46,4.47), les fonctions $U_{B,n}^t(\cdot, x_3)$ et $U_{B,n}^r(\cdot, x_3)$ s'écrivent nécessairement pour tout $x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0$:

$$U_{B,n}^t(x_1, x_3) = \int_B A(\alpha_1) t_B^d(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 - \alpha_3^d(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1, \quad (4.48)$$

et pour tout $x_1 \in \mathbb{R}, x_3 \geq 0$:

$$U_{B,n}^r(x_1, x_3) = \int_B A(\alpha_1) r_B^u(\alpha_1) \exp\{i\omega[\alpha_1 x_1 + \alpha_3^u(\alpha_1) x_3]\} d\alpha_1, \quad (4.49)$$

Si les fonctions $U_{B,n}^t(\cdot, x_3)$ et $U_{B,n}^r(\cdot, x_3)$ convergent en moyenne quadratique vers les fonctions $U_B^t(\cdot, x_3)$ et $U_B^r(\cdot, x_3)$, alors, pour tout x_3 où elles sont définies,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_{B,n}^t(\cdot, x_3) - U_B^t(\cdot, x_3)\|_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_{B,n}^r(\cdot, x_3) - U_B^r(\cdot, x_3)\|_2^2 = 0.$$

Nous utilisons la définition (4.44) du produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_2$ et l'unitarité de la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C})$. Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |A(\alpha_1)|^2 |t_B^d(\alpha_1) - t_n^d(\alpha_1)|^2 d\alpha_1 &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |A(\alpha_1)|^2 |r_B^u(\alpha_1) - r_n^u(\alpha_1)|^2 d\alpha_1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Nous développons les fonctions sous les symboles intégrales dans les égalités (4.50) : $|t_B^d - t_n^d|^2 = |t_B^d|^2 + |t_n^d|^2 - t_B^d \bar{t}_n^d - \bar{t}_B^d t_n^d$ et $|r_B^u - r_n^u|^2 = |r_B^u|^2 + |r_n^u|^2 - r_B^u \bar{r}_n^u - \bar{r}_B^u r_n^u$. Nous pouvons alors utiliser la conséquence (4.20) du lemme fondamental et les résultats (B.2, B.14, B.24, B.27) établis dans l'annexe B. Alors, après le passage à la limite dans les égalités (4.50), nous obtenons

$$\begin{aligned} A(\alpha_1) \neq 0 &\implies |t_B^d(\alpha_1)|^2 + I_{T,1}(\alpha_1) = 0, \\ A(\alpha_1) \neq 0 &\implies |r_B^u(\alpha_1)|^2 + I_{R,1}(\alpha_1) - r_B^u(\alpha_1) \bar{r}^u(\alpha_1) - \bar{r}_B^u(\alpha_1) r^u(\alpha_1) = 0, \end{aligned} \tag{4.51}$$

où la fonction $I_{T,1}$ est définie par (B.24), la fonction $I_{R,1}$ est définie par (B.27) et la fonction r^u par (4.27). D'après leur expression (B.24) et (B.27), les fonctions $I_{T,1}$ et $I_{R,1}$ vérifient

$$\forall \alpha_1 \in B : I_{T,1}(\alpha_1) > 0 \quad \text{et} \quad I_{R,1}(\alpha_1) > |r^u(\alpha_1)|^2. \tag{4.52}$$

Alors, si nous combinons les égalités (4.51) et les inégalités (4.52) nous obtenons

$$A(\alpha_1) \neq 0 \implies |t_B^d(\alpha_1)|^2 < 0 \quad \text{et} \quad [|r_B^u(\alpha_1)| - |r^u(\alpha_1)|]^2 < 0.$$

Nous avons obtenu une relation impossible pour chacune des fonctions t_B^d et r_B^u . Nous pouvons donc conclure que les fonctions $U_B^t(\cdot, x_3)$ et $U_B^r(\cdot, x_3)$ d'expression (4.48, 4.49) ne peuvent être les limites en moyenne quadratique des fonctions $U_{B,n}^t(\cdot, x_3)$ et $U_{B,n}^r(\cdot, x_3)$ pour tout x_3 où elles sont définies.

Le théorème 4.3 nous indique qu'il n'est vraisemblablement pas possible de prouver la convergence du champ diffracté dans la bande de transparence B , quelque soit la norme considérée. Le théorème 4.3 va donc dans le sens du théorème 4.2. Ce théorème achève notre étude de la limite du champ diffracté par le cristal.

4.4.5 Conclusion

Nous avons étudié dans cette section 4.4 la convergence des fonctions U_n^t et U_n^r qui représentent le champ électromagnétique diffracté par le cristal constitué de n couches élémentaires.

Les deux notions de convergence que nous avons utilisées vont dans le même sens. D'après le théorème 4.3, *le champ diffracté ne possède pas de limite en moyenne quadratique dans la bande de transparence B* . D'après le théorème 4.2, nous ne pouvons pas montrer la convergence uniforme du champ diffracté dans la bande de transparence B .

Nous avons étudié la convergence du champ diffracté par le cristal afin de compléter l'étude de la limite simple des coefficients de transmission et de réflexion dans la bande de transparence B . Les théorèmes 4.2 et 4.3 apportent *a priori* peu

d'informations supplémentaires sur les propriétés du champ diffracté à la limite thermodynamique dans la bande de transparence B . Néanmoins, le théorème 4.3 nous indique que notre modélisation n'est pas adaptée à l'étude de grandeurs physiques représentées par des fonctions. La suite de ce chapitre 4 sera donc consacrée à l'étude de grandeurs physiques représentées par des quantités scalaires. Surtout, le théorème 4.2 nous indique que le champ diffracté par le cristal converge uniformément sur tout compact ; cette limite nous a permis de définir le coefficient de réflexion (4.27,4.40) sur les interfaces planes séparant le cristal semi-infini du milieu extérieur.

Dans les sections suivantes de ce chapitre 4, nous étudions des grandeurs physiques représentées par des quantités scalaires : nous étudions le flux du vecteur de Poynting et le centre de la densité d'énergie électromagnétique. Nous montrerons alors que le carré du module du coefficient de réflexion (sur les interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur) est en tout point analogue au coefficient de réflexion (sur un dioptré plan) en énergie de Fresnel.

4.5 Le flux du vecteur de Poynting à la limite thermodynamique

Dans cette section 4.5 nous étudions le flux de la partie réelle du vecteur de Poynting à travers les interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur. Nous commençons par donner l'expression de ce flux pour un cristal constitué de n couches élémentaires, puis nous déterminons la limite de ce flux et enfin nous interprétons physiquement le résultat.

4.5.1 Expression du flux du vecteur de Poynting

Le vecteur normal aux interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur est le vecteur e_3 . Nous ne considérons donc que la troisième composante de la partie réelle $(E_\omega \times \overline{H}_\omega + \overline{E}_\omega \times H_\omega)/4$ du vecteur de Poynting complexe. Soit $\Pi_{\omega,3}$ la troisième composante de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe. Alors, d'après la définition (3.11) de la fonction U , l'expression de la fonction $\Pi_{\omega,3}$ est dans tous les cas de polarisation

$$\Pi_{\omega,3} = i(4\omega\nu)^{-1}(U\partial_3\overline{U} - \overline{U}\partial_3U). \quad (4.53)$$

Soient Φ_n^u et Φ_n^d les flux de la partie réelle du vecteur de Poynting à travers les interfaces planes séparant le cristal (constitué de n couches élémentaires) du superstrat et du substrat.

$$\Phi_n^u = \int_{\mathbb{R}} \Pi_{\omega,3}(x_1, 0) dx_1 \quad \text{et} \quad \Phi_n^d = \int_{\mathbb{R}} \Pi_{\omega,3}(x_1, -nh_3) dx_1. \quad (4.54)$$

Nous remplaçons la fonction $\Pi_{\omega,3}$ par son expression (4.53) à partir de la fonction U . Les fonctions U_n^u et U_n^d sont les restrictions de la fonction U dans le superstrat et

dans le substrat : les fonctions $U(\cdot, 0)$ et $U(\cdot, -nh_3)$ coïncident donc avec les fonctions $U_n^u(\cdot, 0)$ et $U_n^d(\cdot, -nh_3)$. Alors, l'expression (4.54) de Φ_n^u et Φ_n^d devient

$$\begin{aligned}\Phi_n^u &= i(4\omega\nu^u)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (U_n^u \partial_3 \bar{U}_n^u - \bar{U}_n^u \partial_3 U_n^u)(x_1, 0) dx_1, \\ \Phi_n^d &= i(4\omega\nu^d)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (U_n^d \partial_3 \bar{U}_n^d - \bar{U}_n^d \partial_3 U_n^d)(x_1, -nh_3) dx_1.\end{aligned}\tag{4.55}$$

Nous exprimons les fonctions U_n^u et U_n^d à partir des fonctions représentant les champs incident, réfléchi et transmis : d'après (3.59), $U_n^u = U^i + U_n^r$ et $U_n^d = U_n^t$. Enfin, nous remplaçons les fonctions U^i , U_n^t et U_n^r par leur expression (3.60, 3.61, 3.62). Alors, d'après l'unitarité de la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C})$,

$$\Phi_n^u = -\Phi^i + \Phi_n^r \quad \text{et} \quad \Phi_n^d = -\Phi_n^t,\tag{4.56}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi^i &= (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 \beta^u(\alpha_1) d\alpha_1, \\ \Phi_n^t &= (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 |t_n^d(\alpha_1)|^2 \beta^d(\alpha_1) d\alpha_1, \\ \Phi_n^r &= (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 |r_n^u(\alpha_1)|^2 \beta^u(\alpha_1) d\alpha_1.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Les scalaires Φ^i , Φ_n^t et Φ_n^r sont les flux du vecteur de Poynting associés aux champs incident, transmis et réfléchi.

Enfin, nous vérifions que le flux du vecteur de Poynting à travers l'interface séparant le cristal du superstrat est identique au flux du vecteur de Poynting à travers l'interface séparant le cristal du substrat. D'après (3.57), les coefficients de transmission et de réflexion vérifient l'égalité $\beta^d |t_n^d|^2 + \beta^u |r_n^u|^2 = \beta^u$. Alors, d'après (4.56, 4.57),

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Phi_n^t + \Phi_n^r = \Phi^i \iff \Phi_n^u = \Phi_n^d.\tag{4.58}$$

4.5.2 Limite du flux du vecteur de Poynting

Nous déterminons la limite quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini des flux des vecteurs de Poynting associés aux champs transmis et réfléchi.

Théorème 4.4 *Les flux Φ_n^t et Φ_n^r des vecteurs de Poynting associés aux champs transmis et réfléchi convergent vers Φ^t et Φ^r . Les limites Φ^t et Φ^r s'expriment à partir du carré du module des coefficients de réflexion r^u et r^d d'expression (4.27) et (4.40).*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^t = \Phi^t \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^r = \Phi^r,\tag{4.59}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi^t &= (1/2) \int_B |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^t(\alpha_1) \beta^u(\alpha_1) d\alpha_1, \\ \Phi^r &= (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^r(\alpha_1) \beta^u(\alpha_1) d\alpha_1,\end{aligned}\tag{4.60}$$

avec

$$\mathcal{E}^t = \frac{(1 - |r^u|^2)(1 - |r^d|^2)}{1 - |r^u|^2|r^d|^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^r = |r^u|^2 + \frac{(1 - |r^u|^2)^2|r^d|^2}{1 - |r^u|^2|r^d|^2}.\tag{4.61}$$

Preuve du théorème 4.4 La méthode pour démontrer le théorème 4.4 est identique à celle utilisée pour démontrer les théorèmes 4.2 et 4.3. Nous séparons les intégrales (4.57) en deux parties : une partie dans le domaine interdit G et une partie dans le domaine de transparence B . Pour la partie dans le domaine interdit G , nous utilisons le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et la convergence simple (4.5) des coefficients de transmission t_n et de réflexion r_n . Pour la partie dans le domaine de transparence B , nous utilisons la conséquence du lemme fondamental de la section 4.3 et les résultats (B.24, B.27) établis dans l'annexe B.

Nous avons donné une expression (4.61) synthétique des fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r . Dans le domaine interdit G , le module des coefficients de réflexion r^u et r^d est égal à 1 : le numérateur et le dénominateur de l'expression (4.61) des fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r s'annulent. Nous devons alors considérer la limite quand le module de r^u et r^d tend vers 1. Pour cela, il suffit de remarquer que $1 - |r^u|^2 \leq 1 - |r^u|^2|r^d|^2 \implies (1 - |r^u|^2)/(1 - |r^u|^2|r^d|^2) \leq 1$. Alors, d'après (4.61), $0 \leq \mathcal{E}^t \leq 1 - |r^d|^2$ et donc

$$\forall \alpha_1 \in G : \mathcal{E}^t(\alpha_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^r(\alpha_1) = 1 - \mathcal{E}^t(\alpha_1) = 1.\tag{4.62}$$

Enfin, le principal intérêt (et aussi la principale difficulté) du théorème 4.4 est de remarquer que les fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r s'expriment à partir des coefficients de réflexion en énergie $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$. Nous interprétons physiquement cette propriété remarquable dans la section 4.5.3 suivante.

4.5.3 Interprétation physique de la limite du flux du vecteur de Poynting : la théorie des rayons

Développement en série des flux Φ^t et Φ^r Nous interprétons l'expression (4.61) des fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r . D'après (4.37), la fonction $|r^u|^2|r^d|^2$ est strictement inférieure à 1 dans le domaine de transparence B . Nous pouvons alors développer la fonction $1/(1 - |r^u|^2|r^d|^2)$ en une série géométrique.

$$\forall \alpha_1 \in B : \frac{1}{1 - |r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2} = \sum_{m=1}^{\infty} [|r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2]^{m-1}.\tag{4.63}$$

Alors, nous pouvons également développer les fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r en une série. D'après (4.61,4.63),

$$\mathcal{E}^t = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_{(m)}^t \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^r = |r^u|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_{(m)}^r, \quad (4.64)$$

où

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \mathcal{E}_{(m)}^t &= (1 - |r^u|^2) (|r^u|^2 |r^d|^2)^{m-1} (1 - |r^d|^2), \\ \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \mathcal{E}_{(m)}^r &= (1 - |r^u|^2) |r^d|^2 (|r^u|^2 |r^d|^2)^{m-1} (1 - |r^u|^2). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Contrairement à la série (4.63), l'expression (4.64) des fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r reste valable dans le domaine interdit G . En effet, d'après (4.65), $\mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_1) = 0$ et $\mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_1) = 0$ pour tout $\alpha_1 \in G$ et pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En reportant le développement (4.64) des fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r dans l'expression (4.60), nous obtenons le développement en série des flux Φ^t et Φ^r .

$$\Phi^t = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{(m)}^t \quad \text{et} \quad \Phi^r = (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 |r^u(\alpha_1)|^2 d\alpha_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{(m)}^r, \quad (4.66)$$

où

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Phi_{(m)}^t &= (1/2) \int_B |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_1) \beta^u(\alpha_1) d\alpha_1, \\ \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Phi_{(m)}^r &= (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_1) \beta^u(\alpha_1) d\alpha_1. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Interprétation physique : la théorie des rayons L'expression développée (4.66) des flux Φ^t et Φ^r nous incite à interpréter le champ électromagnétique en présence du cristal comme une série de rayons (figure 4.4). Dans cette interprétation, le champ électromagnétique est initialement constitué d'un rayon incident se trouvant dans le superstrat et se dirigeant vers le cristal. Lorsque ce rayon incident frappe la première interface plane séparant le cristal du superstrat, il se sépare en deux rayons : un premier rayon réfléchi dans le superstrat emportant la fraction d'énergie $|r^u|^2$ et un deuxième rayon transmis dans le cristal emportant la fraction d'énergie $1 - |r^u|^2$ (figure 4.4). Alors, le phénomène suivant se reproduit une infinité de fois : dès qu'un rayon frappe une interface, il se sépare en une partie réfléchie et une partie transmise.

Dans cette interprétation, les fonctions $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$ jouent le rôle des coefficients de réflexion en énergie sur les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat. Ce sont bien entendu les fonctions $1 - |r^u|^2$ et $1 - |r^d|^2$ qui jouent le rôle des coefficients de transmission en énergie sur les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat. Cette définition des coefficients de réflexion et de transmission en énergie implique que la fraction d'énergie emportée par chaque rayon coïncide avec la définition (4.65) des fonctions $\mathcal{E}_{(m)}^t$ et $\mathcal{E}_{(m)}^r$: par conséquent,

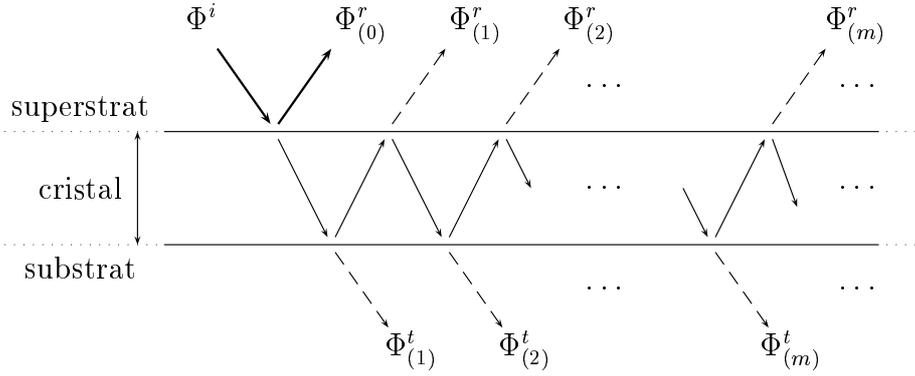


FIG. 4.4: *Interprétation physique de la limite du flux du vecteur de Poynting : la théorie des rayons. Nous avons noté $\Phi_{(0)}^r$ le premier terme du développement (4.66) : $\Phi_{(0)}^r = (1/2) \int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 |r^u(\alpha_1)|^2 d\alpha_1$.*

la fraction de flux emportée par chaque rayon coïncide avec la définition (4.67) des flux $\Phi_{(m)}^t$ et $\Phi_{(m)}^r$.

Nous avons représenté sur la figure 4.4 le champ électromagnétique comme une série de rayons en présence d'un cristal d'épaisseur finie. En effet, le théorème 4.4 nous assure que si le nombre n de couches élémentaires est suffisamment grand, les flux Φ_n^t et Φ_n^r sont très proches de leur limites Φ^t et Φ^r : alors, notre interprétation est valable pour un cristal suffisamment épais.

Enfin, notre interprétation reste valable si le champ incident se trouve dans le substrat. En effet, nous pouvons réécrire le développement (4.64,4.65) des fonctions \mathcal{E}^t et \mathcal{E}^r en permutant les indices u et d . Le développement de la fonction \mathcal{E}^t est alors identique au développement (4.64,4.65) et le développement de la fonction \mathcal{E}^r devient

$$\mathcal{E}^r = |r^d|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (1 - |r^d|^2) |r^u|^2 (|r^u|^2 |r^d|^2)^{m-1} (1 - |r^d|^2). \quad (4.68)$$

Alors, nous pouvons retenir la propriété suivante que nous jugeons remarquable.

Propriété 4.5 *Les propriétés du cristal vis-à-vis du flux du vecteur de Poynting du champ électromagnétique sont toujours semblables à celles d'une structure symétrique par rapport à un plan horizontal, même si la couche élémentaire (et donc le cristal) n'est pas symétrique par rapport à un plan horizontal.*

Cette propriété 4.5 nous indique que les propriétés du cristal photonique sont proches de celles d'une couche "homogène" à toutes les fréquences. En conclusion, nous retiendrons de cette interprétation la propriété suivante.

Propriété 4.6 *Les propriétés du cristal vis-à-vis du flux du vecteur de Poynting du champ électromagnétique peuvent être qualitativement interprétées par la théorie des*

rayons. Quantitativement, les coefficients de réflexion en énergie sur les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat sont les fonctions $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$ d'expression (4.27) et (4.40). La limite uniforme sur tout compact (4.26) du champ électromagnétique réfléchi joue donc le rôle du champ électromagnétique réfléchi sur le cristal photonique semi-infini dans la théorie des rayons.

4.5.4 Illustration de la théorie des rayons : exemple numérique

Données numériques de la figure 4.5 Nous considérons le cas particulier de la couche élémentaire que nous avons définie dans la section 3.1. De même que dans la section 4.2.2, les fonctions ε et μ ont pour valeurs numériques (4.12,4.13) et les deux strates constituant la couche élémentaire ont même épaisseur optique (4.14). Le cristal est constitué de

$$n = 1000 \quad (4.69)$$

couches élémentaires. La valeur numérique de la fréquence et la polarisation (3.11) du champ sont

$$2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 3.96 \quad \text{et} \quad H_{\omega,2} = 0 \quad (\text{polarisation TE}). \quad (4.70)$$

Nous avons choisi cette valeur particulière de la fréquence normalisée pour avoir le coefficient de réflexion en énergie égal à 0.5 pour un angle d'incidence de 30 degrés.

$$|r^u(\alpha_0)|^2 = 0.5 \quad \text{avec} \quad \alpha_0/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sin \theta_0 = 0.5. \quad (4.71)$$

L'amplitude A qui définit (3.60) la fonction U^i représentant le champ incident est une gaussienne centrée en $\alpha_1 = \alpha_0$, de largeur spatiale L et de support K_A .

$$\begin{aligned} \forall \alpha_1 \in K_A & : A(\alpha_1) = \omega L / (2\pi^{1/2}) \exp \left[-(\alpha_1 - \alpha_0)^2 \omega^2 L^2 / 4 \right], \\ \forall \alpha_1 \in K_1 \setminus K_A & : A(\alpha_1) = 0, \end{aligned} \quad (4.72)$$

où

$$L = 200h_3 \quad \text{et} \quad K_A = \{ \alpha_1 \in K_1 \mid |\alpha_1 - \alpha_0| \leq 5.0/(\omega L) \}. \quad (4.73)$$

Nous avons choisi le support de l'amplitude A afin que la partie manquante de la gaussienne soit négligeable.

Exemple numérique Nous avons représenté sur la figure 4.5 le carré du module de la fonction U en échelle logarithmique. Nous pouvons remarquer immédiatement que, qualitativement, le champ électromagnétique peut être interprété comme une série de rayons.

D'après les valeurs numériques que nous avons choisies, les fonctions $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$ prennent la valeur 0.5 en α_0 : $|r^u(\alpha_0)|^2 = |r^d(\alpha_0)|^2 = 0.5$. Alors, d'après (4.65),

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_0) = 0.5^{2m} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_0) = 0.5^{2m+1}. \quad (4.74)$$

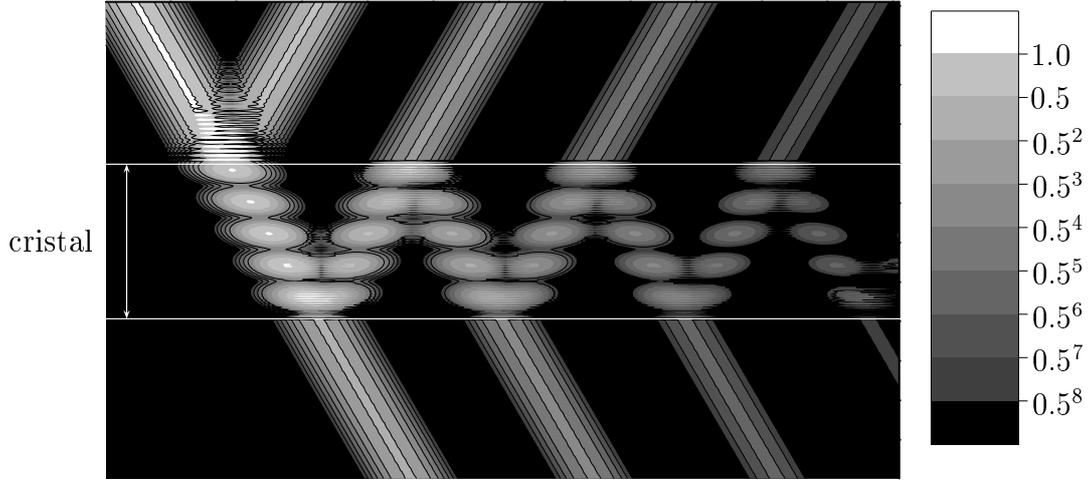


FIG. 4.5: *Illustration de la théorie des rayons. Nous avons représenté le carré du module de la fonction U . L'échelle de gris est logarithmique : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction U^i représentant le champ incident.*

D'après (4.73), la largeur en α_1 de l'amplitude A , inversement proportionnelle à la largeur spatiale L , est très petite ; la fonction $|A|^2$ se comporte approximativement comme la "fonction" de Dirac $\delta(\alpha_1 - \alpha_0)$ (à une constante multiplicative près) dans les expressions (4.57) de Φ^i et (4.67) de $\Phi_{(m)}^t$ et $\Phi_{(m)}^r$. Alors,

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Phi_{(m)}^t / \Phi^i \approx \mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_0) \quad \text{et} \quad \Phi_{(m)}^r / \Phi^i \approx \mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_0). \quad (4.75)$$

Alors, nous pouvons estimer que chaque rayon transmis emporte la fraction de flux (ou d'énergie) $\mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_0)$ et chaque rayon réfléchi emporte la fraction de flux (ou d'énergie) $\mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_0)$. La figure 4.5 nous permet de vérifier que chaque rayon emporte la fraction d'énergie prédite par (4.74). En effet, la figure 4.5 nous permet de distinguer qu'après un impact sur une interface, le nouveau rayon diffracté comprend tous les niveaux de gris du précédent rayon diffracté sauf le niveau de gris le plus clair (le nouveau rayon emporte deux fois moins d'énergie que le rayon précédent).

Cet exemple confirme donc que la théorie des rayons est une interprétation qui permet de décrire qualitativement et quantitativement le champ diffracté par un cristal suffisamment épais.

4.6 Le centre de l'énergie électromagnétique à la limite thermodynamique

Dans cette section 4.6 nous étudions le centre de l'énergie du champ électromagnétique diffracté par le cristal. Notre méthode est inspirée de celle utilisée pour étudier les déplacements à la réflexion totale sur un dioptre plan (déplacement Goos-Hänchen [56]).

Nous commençons par donner l'expression de ce centre pour un cristal constitué de n couches élémentaires, puis nous déterminons la limite de ce centre quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini. Enfin nous interprétons physiquement le résultat : nous pourrions alors faire le lien avec l'étude de la trajectoire du champ électromagnétique que nous avons réalisée dans la première partie.

Les hypothèses que nous avons faites sur le champ électromagnétique dans la section 3.2 ne permettent pas de garantir l'existence du centre de l'énergie électromagnétique. C'est pourquoi nous commençons par faire une quatrième hypothèse sur le champ électromagnétique.

Hypothèse II.4 Nous supposons que l'amplitude A du champ électromagnétique incident (3.46) est dérivable et que sa dérivée A' est de carré sommable.

$$A' \in L^2(K_1, d\alpha_1; C). \quad (4.76)$$

4.6.1 Expression du centre de l'énergie électromagnétique

Nous définissons le centre de l'énergie électromagnétique à l'altitude x_3 comme la moyenne de l'abscisse x_1 pondérée par la densité d'énergie électromagnétique à l'altitude x_3 . Soit w_ω la densité d'énergie électromagnétique en régime harmonique : $w_\omega = (\varepsilon |E_\omega|^2 + \mu |H_\omega|^2)/4$. Alors, d'après la définition (3.11) de la fonction U , l'expression de la fonction w_ω est dans tous les cas de polarisation

$$w_\omega = (4\omega^2\nu)^{-1}(\omega^2\varepsilon\mu|U|^2 + |\partial_1 U|^2 + |\partial_3 U|^2). \quad (4.77)$$

Soient w^i , w_n^r et w_n^t les densités d'énergie des champs incident, réfléchi et transmis : les fonctions w^i et w_n^r sont définies dans le superstrat et la fonction w_n^t est définie dans le substrat. D'après (4.77),

$$\begin{aligned} w^i &= (4\omega^2\nu^u)^{-1}(\omega^2\varepsilon^u\mu^u|U^i|^2 + |\partial_1 U^i|^2 + |\partial_3 U^i|^2), \\ w_n^r &= (4\omega^2\nu^u)^{-1}(\omega^2\varepsilon^u\mu^u|U_n^r|^2 + |\partial_1 U_n^r|^2 + |\partial_3 U_n^r|^2), \\ w_n^t &= (4\omega^2\nu^d)^{-1}(\omega^2\varepsilon^d\mu^d|U_n^t|^2 + |\partial_1 U_n^t|^2 + |\partial_3 U_n^t|^2). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Soient X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$ les centres de l'énergie électromagnétique associés aux champs incident, réfléchi et transmis. Alors, pour tout $x_3 \geq 0$:

$$X_1^i(x_3) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x_1 w^i(x_1, x_3) dx_1}{\int_{\mathbb{R}} w^i(x_1, x_3) dx_1} \quad \text{et} \quad X_{1,n}^r(x_3) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x_1 w_n^r(x_1, x_3) dx_1}{\int_{\mathbb{R}} w_n^r(x_1, x_3) dx_1}, \quad (4.79)$$

et pour tout $x_3 \leq -nh_3$:

$$X_{1,n}^t(x_3) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x_1 w_n^t(x_1, x_3) dx_1}{\int_{\mathbb{R}} w_n^t(x_1, x_3) dx_1}. \quad (4.80)$$

Cette expression des centres X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$ suppose *a priori* que l'énergie des champs incident, réfléchi et transmis n'est pas nulle (les dénominateurs des expressions (4.79) et (4.80) ne sont pas nuls). Cette hypothèse est vérifiée dès que l'amplitude A est différente de la fonction nulle.

C'est l'hypothèse II.4 qui garantit l'existence de cette expression des centres X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$. En effet, d'après l'expression (3.60,3.61,3.62) des fonctions U^i , U_n^r et U_n^t et l'hypothèse (4.76), les fonctions $x_1 \mapsto x_1 U^i(x_1, x_3)$ et $x_1 \mapsto x_1 U_n^r(x_1, x_3)$ sont de carré sommable pour tout $x_3 \geq 0$, et la fonction $x_1 \mapsto x_1 U_n^t(x_1, x_3)$ est de carré sommable pour tout $x_3 \leq -nh_3$.

Nous transformons l'expression (4.79,4.80) des centres X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$.

Nous présentons en détail la transformation du centre X_1^i du champ incident. La transformation des centres $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$ est identique. Nous remplaçons la fonction w^i par son expression (4.78) dans l'expression (4.79) du centre X_1^i et nous utilisons la définition du produit scalaire (4.44). Alors,

$$X_1^i = \frac{\omega^2 \varepsilon^u \mu^u \langle x_1 U^i, U^i \rangle_2 + \langle x_1 \partial_1 U^i, \partial_1 U^i \rangle_2 + \langle x_1 \partial_3 U^i, \partial_3 U^i \rangle_2}{\omega^2 \varepsilon^u \mu^u \langle U^i, U^i \rangle_2 + \langle \partial_1 U^i, \partial_1 U^i \rangle_2 + \langle \partial_3 U^i, \partial_3 U^i \rangle_2}. \quad (4.81)$$

A ce stade, Nous utilisons l'unitarité de la transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}, dx_1; \mathbb{C})$. Nous devons donc déterminer les transformées de Fourier de toutes les fonctions présentes dans l'expression (4.81). Pour toute fonction V de carré sommable, nous notons \widehat{V} sa transformée de Fourier (3.14). D'après l'expression (3.46) de la fonction \widehat{U}^i , le module de la fonction $\partial_3 \widehat{U}^i$ est majoré indépendamment de la variable x_3 par une fonction positive et sommable.

$$\forall \alpha_1 \in K_1, \forall x_3 \geq 0 : |(\partial_3 \widehat{U}^i)(\alpha_1, x_3)| = |A(\alpha_1)| \omega \alpha_3^d(\alpha_1). \quad (4.82)$$

Nous pouvons donc utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme pour déterminer l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $\partial_3 U^i$. Alors, d'après (3.60,3.46),

$$\widehat{\partial_3 U^i} = \partial_3 \widehat{U}^i = i\omega \alpha_3^u \widehat{U}^i. \quad (4.83)$$

D'après l'hypothèse (3.16) que nous avons faite sur le champ électromagnétique, la fonction U^i est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 et toutes ses dérivées sont de carré sommable. Alors, d'après (3.60),

$$\widehat{\partial_1 U^i} = i\omega \alpha_1 \widehat{U}^i. \quad (4.84)$$

Enfin, d'après les expressions (3.46,4.83,4.84) et l'hypothèse (4.76), les fonctions \widehat{U}^i , $\widehat{\partial_3 U^i}$, $\widehat{\partial_1 U^i}$ sont dérivables par rapport à la variable α_1 et leurs dérivées sont de carré sommable. Alors, nous pouvons utiliser que

$$\forall V = \widehat{U}^i, \widehat{\partial_3 U^i}, \widehat{\partial_1 U^i} : x_1 \widehat{V} = (i/\omega) \partial \widehat{V} / \partial \alpha_1. \quad (4.85)$$

Nous utilisons les relations (4.83,4.84,4.85) pour transformer l'expression (4.81). Nous obtenons alors l'expression du centre X_1^i à partir de la seule fonction \widehat{U}^i .

$$X_1^i = \frac{\langle (\partial \widehat{U}^i / \partial \alpha_1), [\varepsilon^u \mu^u + \alpha_1^2 + (\alpha_3^u)^2] \widehat{U}^i \rangle_2 + \langle \widehat{U}^i, [\alpha_1 + \alpha_3^u (d\alpha_3^u / d\alpha_1)] \widehat{U}^i \rangle_2}{i\omega \langle \widehat{U}^i, [\varepsilon^u \mu^u + \alpha_1^2 + (\alpha_3^u)^2] \widehat{U}^i \rangle_2}. \quad (4.86)$$

Nous pouvons simplifier cette dernière expression (4.86) du centre X_1^i . En effet, d'après la définition (3.43) de la fonction α_3^u ,

$$\alpha_1^2 + (\alpha_3^u)^2 = \varepsilon^u \mu^u \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \alpha_3^u (d\alpha_3^u/d\alpha_1) = 0.$$

Alors, l'expression (4.86) du centre X_1^i devient

$$X_1^i = \frac{\langle (\partial \widehat{U}^i / \partial \alpha_1), \widehat{U}^i \rangle_2}{i\omega \langle \widehat{U}^i, \widehat{U}^i \rangle_2}. \quad (4.87)$$

Cette dernière expression (4.87) du centre X_1^i nous indique que tout se passe comme si le champ électromagnétique se réduisait à sa seule composante (suivant la deuxième direction) U . La transformation des centres $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$ aboutie à des expressions identiques à celle (4.87) du centre X_1^i si nous remplaçons la fonction \widehat{U}^i par les fonctions \widehat{U}_n^r et \widehat{U}_n^t . Enfin, nous remplaçons la fonction \widehat{U}^i par son expression (3.46). Alors, pour tout $x_3 \geq 0$:

$$X_1^i(x_3) = \frac{\langle A', A \rangle_2}{i\omega \langle A, A \rangle_2} - x_3 \frac{\langle A(-d\alpha_3^u/d\alpha_1), A \rangle_2}{\langle A, A \rangle_2}. \quad (4.88)$$

Nous remplaçons la fonction \widehat{U}^i par la fonction \widehat{U}_n^r dans l'expression (4.87) puis nous remplaçons la fonction \widehat{U}_n^r par son expression (3.48). Alors, pour tout $x_3 \geq 0$:

$$X_{1,n}^r(x_3) = \frac{\langle [\partial(Ar_n^u)/\partial \alpha_1], Ar_n^u \rangle_2}{i\omega \langle Ar_n^u, Ar_n^u \rangle_2} + x_3 \frac{\langle Ar_n^u(-d\alpha_3^u/d\alpha_1), Ar_n^u \rangle_2}{\langle Ar_n^u, Ar_n^u \rangle_2}, \quad (4.89)$$

Nous remplaçons la fonction \widehat{U}^i par la fonction \widehat{U}_n^t dans l'expression (4.87) puis nous remplaçons la fonction \widehat{U}_n^t par son expression (3.48). Alors, pour tout $x_3 \leq -nh_3$:

$$X_{1,n}^t(x_3) = \frac{\langle [\partial(At_n^d)/\partial \alpha_1], At_n^d \rangle_2}{i\omega \langle At_n^d, At_n^d \rangle_2} - (x_3 + nh_3) \frac{\langle At_n^d(-d\alpha_3^d/d\alpha_1), At_n^d \rangle_2}{\langle At_n^d, At_n^d \rangle_2}, \quad (4.90)$$

L'expression (4.88, 4.89, 4.90) que nous avons obtenue nous indique que les centres X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$ décrivent des droites (figure 4.6). Soient D^i , D_n^r et D_n^t les pentes des droites décrites par les centres X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$. Alors, pour tout $x_3 \geq 0$:

$$X_1^i(x_3) = X_1^i(0) + x_3 D^i \quad \text{et} \quad X_{1,n}^r(x_3) = X_{1,n}^r(0) + x_3 D_n^r, \quad (4.91)$$

et pour tout $x_3 \leq -nh_3$:

$$X_{1,n}^t(x_3) = X_{1,n}^r(-nh_3) + (x_3 + nh_3) D_n^t, \quad (4.92)$$

L'étude du centre de l'énergie du champ diffracté se réduit donc à l'étude de la limite des deux déplacements $X_{1,n}^r(-nh_3) - X_1^i(0)$ et $X_{1,n}^r(0) - X_1^i(0)$, et des deux pentes D_n^t et D_n^r .

Notre étude de la section 4.4 sur la limite du champ diffracté nous indique que l'ensemble du champ transmis et qu'une partie du champ réfléchi sont repoussés à l'infini quand le nombre de couches élémentaires tend vers l'infini. Alors, les déplacements $X_{1,n}^t(-nh_3) - X_1^i(0)$ et $X_{1,n}^r(0) - X_1^i(0)$ tendent vraisemblablement vers l'infini quand le nombre n de couches élémentaires tend vers l'infini. C'est pourquoi

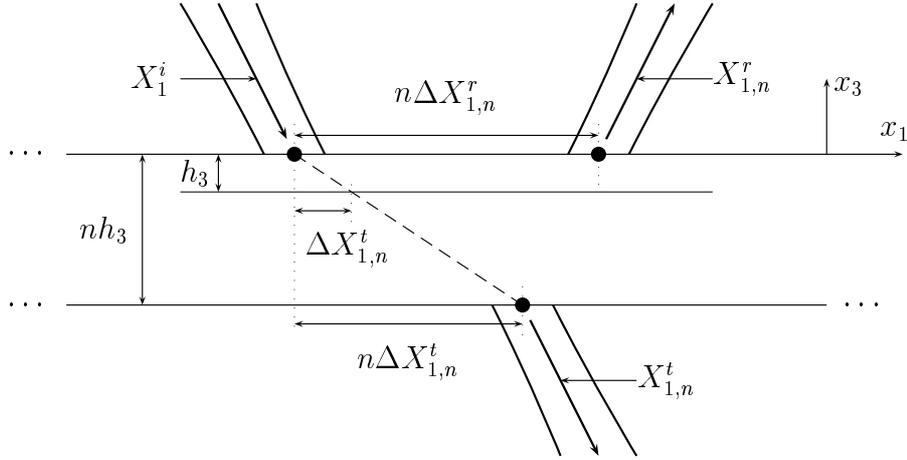


FIG. 4.6: Représentation des droites décrites par les centres X_1^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$ des champs incident, réfléchi et transmis.

il semble plus approprié de considérer le rapport de ces déplacements sur le nombre n de couches élémentaires (figure 4.6). Soient $\Delta X_{1,n}^t$ et $\Delta X_{1,n}^r$ ces rapports.

$$\Delta X_{1,n}^t = \frac{X_{1,n}^t(-nh_3) - X_1^i(0)}{n} \quad \text{et} \quad \Delta X_{1,n}^r = \frac{X_{1,n}^r(0) - X_1^i(0)}{n}. \quad (4.93)$$

4.6.2 Limite du centre de l'énergie électromagnétique

L'expression (4.80) du centre de l'énergie du champ transmis est normalisée par l'énergie transmise. L'énergie transmise est susceptible de s'annuler à la limite si le support de l'amplitude A est inclus dans le domaine interdit G . C'est pourquoi la limite du centre $X_{1,n}^t$ n'est valable que dans le cas où la limite de l'énergie transmise est non-nulle. D'après les expressions (4.90) du centre $X_{1,n}^t$ et (4.57) du flux Φ_n^t , la limite de l'énergie transmise est non-nulle si et seulement si la limite Φ^t (4.60) du flux transmis est non-nulle.

Enfin, notre résultat sur la limite des déplacements $\Delta X_{1,n}^t$ et $\Delta X_{1,n}^r$ nécessite une cinquième hypothèse sur le champ électromagnétique.

Hypothèse II.5 Nous supposons que le produit de l'amplitude A avec la fonction $1/\sin \varphi$ est de carré sommable sur l'ensemble K_1 .

$$A/\sin \varphi \in L^2(K_1, d\alpha_1; C). \quad (4.94)$$

Cette hypothèse implique que l'amplitude A doit tendre suffisamment rapidement vers zéro quand la variable α_1 s'approche de la frontière Δ_0 . En effet, la fonction $\sin \varphi$ s'annule systématiquement sur la frontière Δ_0 (et la fonction $\sin^2 \varphi$ s'annule au moins aussi vite que $(\alpha_1 - \alpha_0)$ si $\alpha_0 \in \Delta_0$).

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat sur la limite des centres des champs transmis et réfléchi.

Théorème 4.7 (i) La pente D_n^r de la trajectoire du centre du champ réfléchi converge vers D^r :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^r = D^r = - \frac{\int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^r(\alpha_1) \frac{d\alpha_3^u}{d\alpha_1}(\alpha_1) d\alpha_1}{\int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^r(\alpha_1) d\alpha_1}. \quad (4.95)$$

(ii) Si la limite Φ^t (4.60) du flux transmis est non-nulle, alors la pente D_n^t de la trajectoire du centre du champ transmis converge vers D^t : $\Phi^t \neq 0 \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^t = D^t = + \frac{\int_B |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^t(\alpha_1) \frac{\beta^u(\alpha_1)}{\beta^d(\alpha_1)} \frac{d\alpha_3^d}{d\alpha_1}(\alpha_1) d\alpha_1}{\int_B |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^t(\alpha_1) \frac{\beta^u(\alpha_1)}{\beta^d(\alpha_1)} d\alpha_1}. \quad (4.96)$$

(iii) Si l'amplitude A vérifie les hypothèses (4.76,4.94), alors le déplacement $\Delta X_{1,n}^r$ converge vers ΔX_1^r : (4.76,4.94) \implies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta X_{1,n}^r = \Delta X_1^r = h_3 \frac{\int_B |A(\alpha_1)|^2 \Xi^r(\alpha_1) \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1}(\alpha_1) d\alpha_1}{\int_{K_1} |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^r(\alpha_1) d\alpha_1}. \quad (4.97)$$

où pour tout $\alpha_1 \in B$:

$$\Xi^r(\alpha_1) = 2 \frac{[1 - |r^u(\alpha_1)|^2]^2 |r^d(\alpha_1)|^2}{[1 - |r^u(\alpha_1)|^2 |r^d(\alpha_1)|^2]^2} \quad \text{et} \quad \alpha_3^c(\alpha_1) = - \frac{T_{12}(\alpha_1)}{|T_{12}(\alpha_1)|} \frac{\varphi(\alpha_1)}{\omega h_3}. \quad (4.98)$$

(iv) Si la limite Φ^t (4.60) du flux transmis est non-nulle et si l'amplitude A vérifie les hypothèses (4.76,4.94), alors le déplacement $\Delta X_{1,n}^t$ converge vers ΔX_1^t : $\Phi^t \neq 0$ et (4.76,4.94) \implies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta X_{1,n}^t = \Delta X_1^t = h_3 \frac{\int_B |A(\alpha_1)|^2 \Xi^t(\alpha_1) \frac{\beta^u(\alpha_1)}{\beta^d(\alpha_1)} \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1}(\alpha_1) d\alpha_1}{\int_B |A(\alpha_1)|^2 \mathcal{E}^t(\alpha_1) \frac{\beta^u(\alpha_1)}{\beta^d(\alpha_1)} d\alpha_1}. \quad (4.99)$$

où pour tout $\alpha_1 \in B$:

$$\Xi^t(\alpha_1) = \frac{[1 - |r^u(\alpha_1)|^2] [1 - |r^d(\alpha_1)|^2] [1 + |r^u(\alpha_1)|^2 |r^d(\alpha_1)|^2]}{[1 - |r^u(\alpha_1)|^2 |r^d(\alpha_1)|^2]^2}. \quad (4.100)$$

La preuve de ce théorème 4.7 est identique aux preuves des théorèmes 4.2, 4.3, et 4.4. Nous séparons les intégrales présentes dans les expressions (4.88,4.89,4.90) en deux parties : une partie dans le domaine interdit G et une partie dans le domaine de transparence B . Enfin, nous utilisons le théorème de la convergence dominée de Lebesgue puis la convergence simple des coefficients t_n et r_n dans le domaine interdit G et nous utilisons la conséquence du lemme fondamental de la section 4.3 dans la bande de transparence B . Nous ne présentons pas la preuve du théorème 4.7, purement calculatoire et donc sans intérêt (et plutôt fastidieuse!).

Remarque La dérivée de l'amplitude A n'apparaît plus dans l'expression (4.97, 4.99) des limites ΔX_1^r et ΔX_1^t des déplacements. En effet, la fonction A' apparaît dans des termes majorés indépendamment de n dans l'expression (4.88, 4.89, 4.90) des centres X^i , $X_{1,n}^r$ et $X_{1,n}^t$: ce terme disparaît donc dans les limites ΔX_1^r et ΔX_1^t des déplacements. Alors, nous pouvons définir les limites ΔX_1^r et ΔX_1^t des déplacements pour une amplitude A qui ne vérifie pas l'hypothèse (4.76) directement à partir des expressions (4.97, 4.99).

Remarque Les fonctions Ξ^r et Ξ^t que nous avons définies dans la bande de transparence par (4.98, 4.100) sont uniformément bornées par rapport à la variable α_1 . En effet, il suffit de remarquer que $1 - |r^u|^2 \leq 1 - |r^u|^2|r^d|^2 \implies (1 - |r^u|^2)/(1 - |r^u|^2|r^d|^2) \leq 1$ (et de même $(1 - |r^d|^2)/(1 - |r^u|^2|r^d|^2) \leq 1$). Alors, d'après (4.98, 4.100),

$$\forall \alpha_1 \in B : \Xi^r(\alpha_1) \leq 2 \quad \text{et} \quad \Xi^t(\alpha_1) \leq 2. \quad (4.101)$$

Cela signifie que l'expression (4.97, 4.99) des limites ΔX_1^r et ΔX_1^t des déplacements est définie si la fonction $|A|^2(\partial\alpha_3^c/\alpha_1)$ est sommable sur la bande de transparence B . D'après les définitions (4.98, 3.52) des fonctions α_3^c et φ , la fonction $|A|^2(\partial\alpha_3^c/\alpha_1)$ est sommable sur la bande de transparence B si et seulement si la fonction $|A|^2/\sin\varphi$ est sommable sur la bande de transparence B :

$$\int_B |A(\alpha_1)|^2/\sin\varphi(\alpha_1) d\alpha_1 < \infty \implies \Delta X_1^r < \infty \quad \text{et} \quad \Delta X_1^t < \infty. \quad (4.102)$$

La fonction $\sin\varphi$ est infiniment dérivable dans l'ouvert B et s'annule sur la frontière Δ_0 de B : nous examinons donc le comportement de la fonction $\sin\varphi$ au voisinage de la frontière Δ_0 . Soit $\alpha_0 \in \Delta_0$. D'après la définition (3.52) de la fonction φ , l'équivalent de la fonction $\sin\varphi$ en α_0 est

$$\sin\varphi(\alpha_1) \underset{\alpha_1 \rightarrow \alpha_0}{\sim} \sqrt{|\alpha_1 - \alpha_0|} \sqrt{(\partial T_{11}/\partial\alpha_1)(\alpha_0) + (\partial T_{22}/\partial\alpha_1)(\alpha_0)}. \quad (4.103)$$

Alors, si la dérivée de la trace de la matrice T ne s'annule pas sur la frontière Δ_0 , il n'est pas nécessaire que l'amplitude A s'annule pour définir l'expression (4.97, 4.99) des limites ΔX_1^r et ΔX_1^t des déplacements : en particulier, l'amplitude A peut être seulement bornée au voisinage de la frontière Δ_0 . Nous pensons que cette remarque est importante car certains phénomènes intéressants se produisent au voisinage de la frontière Δ_0 .

Pour conclure ces remarques, nous retiendrons la propriété suivante.

Propriété 4.8 *L'expression (4.97, 4.99) des limites ΔX_1^r et ΔX_1^t des déplacements reste définie si nous remplaçons les hypothèses (4.76, 4.94) par la seule hypothèse (4.102).*

Enfin, le principal intérêt (et aussi la principale difficulté) du théorème 4.7 est de remarquer que les fonctions Ξ^r et Ξ^t s'expriment à partir des coefficients de réflexion en énergie $|r^u|^2$ et $|r^d|^2$. Nous interprétons physiquement cette propriété remarquable dans la section 4.6.3 suivante.

4.6.3 Interprétation physique de la limite du centre de l'énergie : la vitesse de groupe

Cas particulier Pour pouvoir interpréter le théorème 4.7, nous devons considérer le cas particulier où le carré du module $|A|^2$ de l'amplitude A se comporte approximativement comme la "fonction" de Dirac $\delta(\alpha_1 - \alpha_0)$ avec $\alpha_0 \in B$ (c'est le cas de l'exemple numérique de la section 4.5.4).

$$|A(\alpha_1)|^2 \approx \delta(\alpha_1 - \alpha_0). \quad (4.104)$$

Alors, l'expression (4.95,4.96,4.97,4.99) des limites des pentes et des déplacements du théorème 4.7 deviennent approximativement

$$\begin{aligned} D^r &\approx -\frac{d\alpha_3^u}{d\alpha_1}(\alpha_0), & \Delta X_1^r &\approx h_3 \frac{\Xi^r(\alpha_0)}{\mathcal{E}^r(\alpha_0)} \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1}(\alpha_0), \\ D^t &\approx +\frac{d\alpha_3^d}{d\alpha_1}(\alpha_0), & \Delta X_1^t &\approx h_3 \frac{\Xi^t(\alpha_0)}{\mathcal{E}^t(\alpha_0)} \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1}(\alpha_0). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Cette expression (4.105) des pentes D^r et D^t peut être développée artificiellement en une série de rayons : la pente D^r peut s'écrire comme la moyenne de la constante $-(d\alpha_3^u/d\alpha_1)(\alpha_0)$ pondérée par les fractions d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_0)$ et la pente D^r peut s'écrire comme la moyenne de la constante $(d\alpha_3^d/d\alpha_1)(\alpha_0)$ pondérée par les fractions d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_0)$. Autrement dit, tous les rayons réfléchis ont la même pente D^r et tous les rayons transmis ont la même pente D^t .

Développement en série des déplacements ΔX_1^r et ΔX_1^t D'après (4.105), nous devons développer en série les fonctions Ξ^t et Ξ^r dans la bande de transparence B . En utilisant que $d[(1-v)^{-1}]/dv = (1-v)^{-2}$ pour $v = |r^u|^2|r^d|^2$, nous obtenons pour tout $\alpha_1 \in B$:

$$\frac{1}{[1 - |r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2]^2} = \sum_{m=1}^{\infty} m [|r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2]^{m-1}. \quad (4.106)$$

En utilisant que $d[v/(1-v^2)]/dv = (1+v^2)/(1-v^2)^2$ pour $v = |r^u r^d|$, nous obtenons pour tout $\alpha_1 \in B$:

$$\frac{1 + |r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2}{[1 - |r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2]^2} = \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) [|r^u(\alpha_1)|^2|r^d(\alpha_1)|^2]^{m-1}. \quad (4.107)$$

Nous utilisons (4.106) pour développer l'expression (4.98) de la fonction Ξ^r et nous utilisons (4.107) pour développer l'expression (4.100) de la fonction Ξ^t . Alors, nous pouvons exprimer les fonctions Ξ^r et Ξ^t à partir des fractions d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^r$ et $\mathcal{E}_{(m)}^t$ d'expression (4.65). Pour tout $\alpha_1 \in B$:

$$\Xi^r(\alpha_1) = \sum_{m=1}^{\infty} 2m \mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_1) \quad \text{et} \quad \Xi^t(\alpha_1) = \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_1). \quad (4.108)$$

Enfin, en utilisant les développements (4.65,4.108) des fonctions \mathcal{E}^r , \mathcal{E}^t , Ξ^r et Ξ^t nous pouvons développer l'expression (4.105) des déplacements ΔX_1^r et ΔX_1^t en série.

$$\Delta X_1^r \approx \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_0) \Delta X_{1,(m)}^r(\alpha_0)}{\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_{(m)}^r(\alpha_0)} \quad \text{et} \quad \Delta X_1^t \approx \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_0) \Delta X_{1,(m)}^t(\alpha_0)}{\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_{(m)}^t(\alpha_0)}, \quad (4.109)$$

où pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\Delta X_{1,(m)}^r(\alpha_0) = 2mh_3 \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1}(\alpha_0) \quad \text{et} \quad \Delta X_{1,(m)}^t(\alpha_0) = (2m-1)h_3 \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1}(\alpha_0). \quad (4.110)$$

Cette expression nous indique que les déplacements ΔX_1^r et ΔX_1^t peuvent se développer comme une moyenne pondérée par les fractions d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^r$ et $\mathcal{E}_{(m)}^t$. Les fractions d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^r$ et $\mathcal{E}_{(m)}^t$ correspondent à l'énergie emportée par chaque rayon : nous pouvons donc en déduire que le nombre $\Delta X_{1,(m)}^r(\alpha_0)$ correspond au déplacement du rayon réfléchi emportant la fraction d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^r$ et que le nombre $\Delta X_{1,(m)}^t(\alpha_0)$ correspond au déplacement rayon transmis emportant la fraction d'énergie $\mathcal{E}_{(m)}^t$.

Nous examinons maintenant la fonction $\partial \alpha_3^c / \partial \alpha_1$ afin de caractériser les déplacements $\Delta X_{1,(m)}^r(\alpha_0)$ et $\Delta X_{1,(m)}^t(\alpha_0)$ des rayons réfléchis et transmis.

Interprétation physique : la vitesse de groupe La fonction T_{12} ne s'annule jamais dans la bande de transparence. En effet, d'après la propriété (3.37) et la définition (3.52) de la fonction φ : $1 = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \implies T_{12}T_{21} = -\sin^2 \varphi - (T_{11} - T_{22})^2/4 < 0$ pour tout $\alpha_1 \in B$. Alors, la fonction $T_{12}/|T_{12}|$ qui intervient dans l'expression (4.98) de la fonction α_3^c est égale à la constante ± 1 . D'après l'expression (4.98) de la fonction α_3^c et la définition (4.2) du vecteur $k = (k_1, k_3)$,

$$\alpha_3^c = \mp \varphi / (\omega h_3) = \pm 2\pi k_3 / (\omega h_3) \quad \text{et} \quad \alpha_1 = 2\pi k_1 / (\omega h_1). \quad (4.111)$$

Alors, nous pouvons exprimer la fonction $\partial \alpha_3^c / \partial \alpha_1$ à partir du vecteur $k = (k_1, k_3)$:

$$\frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1} = \pm (h_1/h_3) \frac{\partial k_3}{\partial k_1}. \quad (4.112)$$

La relation de dispersion (4.3) permet de définir la vitesse de groupe $\nabla_k \omega$ (2.42). D'après la définition (4.1) de la base du réseau réciproque

$$\nabla_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} d_1^* + \frac{\partial \omega}{\partial k_3} d_3^* = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} (2\pi/h_1) e_1 + \frac{\partial \omega}{\partial k_3} (2\pi/h_3) e_3. \quad (4.113)$$

Soit θ^c l'angle entre le vecteur e_3 et la vitesse de groupe (figure 4.7). D'après (3.1), les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux et de norme 1. Alors,

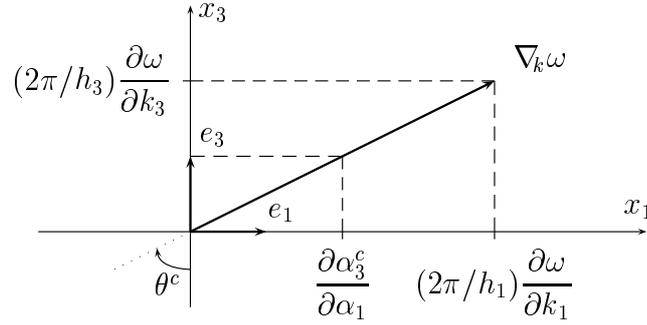


FIG. 4.7: Relation entre la vitesse de groupe $\nabla_k \omega$ et la fonction $\partial \alpha_3^c / \partial \alpha_1 = \tan \theta^c$.

$$\sin \theta^c = (\nabla_k \omega) \cdot e_3 / |\nabla_k \omega| \quad \text{et} \quad \cos \theta^c = (\nabla_k \omega) \cdot e_1 / |\nabla_k \omega|. \quad (4.114)$$

Enfin, nous utilisons que la fréquence ω est constante dans cette étude de la deuxième partie. Alors, d'après la définition (4.114) de l'angle θ^c et les expressions (4.112, 4.113) de la fonction $\partial \alpha_3^c / \partial \alpha_1$ et de la vitesse de groupe,

$$d\omega = 0 = \frac{\partial \omega}{\partial k_1} dk_1 + \frac{\partial \omega}{\partial k_3} dk_3 \implies \frac{\partial \alpha_3^c}{\partial \alpha_1} = \pm (h_1/h_3) \frac{\partial k_3}{\partial k_1} = \mp \tan \theta^c. \quad (4.115)$$

Alors, d'après (4.110), nous pouvons exprimer les déplacements de $\Delta X_{1,(m)}^r(\alpha_0)$ et $\Delta X_{1,(m)}^t(\alpha_0)$ des rayons réfléchis et transmis à partir de la vitesse de groupe par l'intermédiaire de l'angle θ^c .

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Delta X_{1,(m)}^r(\alpha_0) &= \mp 2m h_3 \tan \theta^c(\alpha_0). \\ \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Delta X_{1,(m)}^t(\alpha_0) &= \mp (2m - 1) h_3 \tan \theta^c(\alpha_0). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Conclusion L'expression (4.116) que nous avons obtenue nous indique la disposition des différents rayons diffractés par le cristal. Nous pouvons déduire de cette disposition des rayons diffractés la trajectoire des rayons dans le cristal (figure 4.8) : l'écart entre deux rayons diffractés successifs implique que la trajectoire des rayons à l'intérieur du cristal coïncide avec la vitesse de groupe (figure 4.8). Nous retrouvons le résultat (2.57) de la section 2.2.5 : *la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal coïncide avec la vitesse de groupe en régime harmonique.*

Enfin, les résultats de cette section 4.6.3 sont en parfait accord avec l'interprétation de la section précédente ; l'étude du centre du champ diffracté confirme que celui-ci peut être interprété comme une série de rayons.

Cette étude du centre de l'énergie électromagnétique permet donc de rassembler de façon cohérente les résultats sur la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal (établis dans la section 2.2) et l'influence des interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur (déterminée dans la section 4.5).

Nous pouvons maintenant compléter la figure 4.4 en précisant la position des rayons diffractés ; nous avons représenté sur la figure 4.8 un champ électromagnétique dont l'amplitude vérifie la condition (4.104) en présence d'un cristal suffisamment épais.

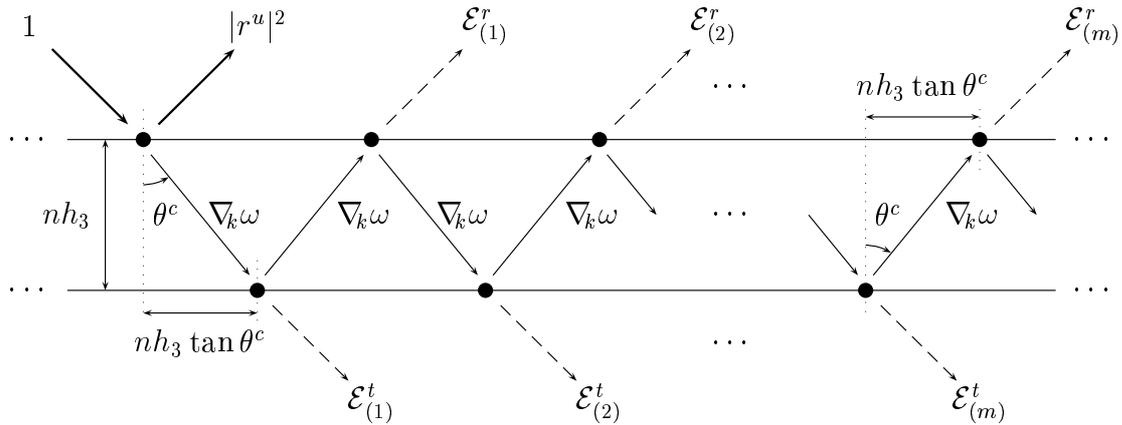


FIG. 4.8: *Interprétation physique de la limite du centre de l'énergie : la vitesse de groupe $\nabla_k \omega$.*

Exemple numérique Nous nous contentons de vérifier que la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal coïncide avec la vitesse de groupe dans l'exemple numérique de ce chapitre 4 : les valeurs numériques de tous les paramètres sont identiques à celles de la section 4.5.4.

Nous avons représenté sur la figure 4.9 à gauche la relation de dispersion (4.3) pour la fréquence (4.70). Nous avons choisi la période h_1 égale à la période h_3 : les

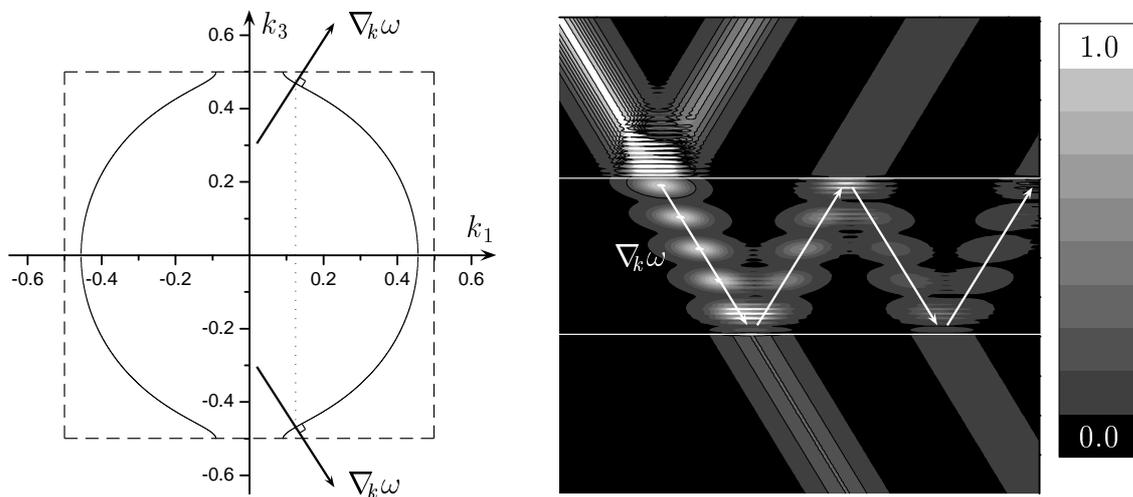


FIG. 4.9: *La trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal et la vitesse de groupe en $k_1 = 0.126$ (ce qui correspond à la variable $\alpha_1 = 0.5$ ou encore à un angle dans le milieu extérieur de 30 degrés). Nous avons représenté sur la figure de droite une partie de la figure 4.5 en superposant la vitesse de groupe. L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction U^i représentant le champ incident.*

vecteurs d_1^* et d_3^* de la base réciproque sont donc orthogonaux et de même norme. Alors, la vitesse de groupe est orthogonale à la courbe de fréquence constante que nous avons représentée sur la figure 4.9 : nous pouvons donc lire directement la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal sur la relation de dispersion. D'après la relation (4.111), les valeurs numériques de la section 4.5.4 et le choix $h_1 = h_3$, la valeur numérique de la composante k_1 correspondant à la valeur numérique (4.71) de l'angle d'incidence moyen est

$$k_1 = 0.126. \quad (4.117)$$

Nous avons représenté sur la figure 4.9 à droite une partie de la figure 4.5 : nous pouvons alors vérifier que la trajectoire des rayons coïncide avec la vitesse de groupe dans le cristal.

4.7 Récapitulation

Nous avons étudié les propriétés du champ électromagnétique diffracté par un cristal photonique monodimensionnel à la limite thermodynamique : de même qu'en optique géométrique, les dimensions du cristal sont alors très grandes devant la longueur d'onde du champ électromagnétique. Cette étude nous a permis d'obtenir une interprétation simple (inspirée de l'optique géométrique) des propriétés des cristaux photoniques monodimensionnels. Nous récapitulons l'ensemble de ces propriétés.

Les propriétés d'un cristal photonique monodimensionnel constitué d'un nombre de couches élémentaires suffisamment grand sont qualitativement semblables à celles d'une couche homogène de même épaisseur pour les trois raisons suivantes.

- 1 *Le cristal se comporte toujours comme une structure symétrique par rapport à plan horizontal vis-à-vis du flux du vecteur de Poynting (propriété 4.5).*
- 2 *La trajectoire de l'énergie du champ électromagnétique est rectiligne dans le cristal (2.49, 2.57) : elle est donc indépendante de la variable d'espace x à l'intérieur du cristal.*
- 3 *Le champ électromagnétique se propage librement dans le cristal : tout se passe comme si l'énergie électromagnétique ne voit pas le caractère inhomogène du cristal.*

De même qu'en optique géométrique, le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique monodimensionnel constitué d'un nombre de couches élémentaires suffisamment grand peut être interprété par la théorie des rayons que nous avons décrite dans la section 4.5.3 (propriété 4.6). Il suffit alors de répondre aux deux questions suivantes pour caractériser quantitativement les propriétés d'un cristal photonique monodimensionnel constitué d'un nombre de couches élémentaires suffisamment grand.

- 1 *Quelle est l'angle de réfraction du rayon transmis à l'intérieur du cristal quand un rayon frappe une interface plane séparant le cristal du milieu extérieur? La*

réponse à cette question permettrait de réaliser une analogie avec la deuxième loi de Descartes.

- 2 Quelles sont les fractions d'énergie réfléchie et transmise quand un rayon frappe une interface plane séparant le cristal du milieu extérieur? La réponse à cette question permettrait de réaliser une analogie avec les coefficients de réflexion et de transmission en énergie de Fresnel.

Nous avons répondu à la première question dans les sections 2.2 et 4.6. L'angle de réfraction est déterminé par la trajectoire du champ électromagnétique à l'intérieur du cristal. L'étude du centre de l'énergie électromagnétique du champ diffracté par le cristal et l'étude du vecteur de Poynting dans un cristal parfait nous indiquent que la trajectoire du champ électromagnétique dans le cristal coïncide avec la vitesse de groupe

$$\nabla_k \omega \quad \text{où l'expression de la relation de dispersion } \omega(k) \text{ est (4.3).}$$

Nous avons répondu à la deuxième question dans les sections 4.5 et 4.6. L'étude du centre de l'énergie électromagnétique du champ diffracté par le cristal et l'étude du flux du vecteur de Poynting nous indiquent que les coefficients de réflexion en énergie sur les interfaces planes séparant le cristal du superstrat et du substrat sont les fonctions

$$|r^u|^2 \quad \text{d'expression (4.27) et } |r^d|^2 \quad \text{d'expression (4.40).}$$

Ces fonctions sont définies à partir des coefficients r^u et r^d qui déterminent la limite uniforme sur tout compact du champ électromagnétique diffracté par le cristal (théorème 4.2). La limite uniforme sur tout compact (4.26) du champ électromagnétique réfléchi joue donc le rôle du champ électromagnétique réfléchi sur le cristal photonique semi-infini dans la théorie des rayons (section 4.4.3 et propriété 4.6).

Deuxième partie

Conclusion

La modélisation simple du cristal photonique monodimensionnel permet d'obtenir l'expression analytique des différentes grandeurs physiques. Ce modèle constitue alors l'occasion de comprendre de manière approfondie certains phénomènes physiques.

Nous avons déterminé l'expression analytique du champ électromagnétique diffracté par un cristal d'épaisseur finie. Ainsi, nous avons pu améliorer notre compréhension des phénomènes physiques dus à la taille finie des cristaux photoniques monodimensionnels. En particulier, nous avons déterminé l'influence des interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur. Notre étude nous a donc permis de compléter la présentation usuelle (qui ne peut rendre compte des phénomènes physiques dus à la taille finie) des propriétés des cristaux photoniques que nous avons réalisée dans la première partie.

Nous avons utilisé la démarche qui consiste à faire croître l'épaisseur du cristal vers l'infini (ce que nous avons appelé la limite thermodynamique). Dans ce cas, la longueur d'onde du champ électromagnétique devient nécessairement très petite devant les dimensions totales du cristal. Notre démarche nous a donc menés dans le domaine de validité de l'optique géométrique.

Nous avons montré que, de même qu'en optique géométrique, le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique suffisamment épais peut être interprété par la théorie des rayons. Il suffit alors de répondre aux deux questions suivantes pour caractériser les propriétés du cristal.

- 1 Quelle est l'angle de réfraction du rayon transmis à l'intérieur du cristal quand un rayon frappe une interface plane séparant le cristal du milieu extérieur?*
- 2 Quelles sont les fractions d'énergie réfléchie et transmise quand un rayon frappe une interface plane séparant le cristal du milieu extérieur?*

La réponse à la première question permet de réaliser une analogie avec la deuxième loi de Descartes et la réponse à la seconde question permet de réaliser une analogie avec les coefficients de réflexion et de transmission en énergie de Fresnel.

Nous avons répondu de façon précise à chacune de ces deux questions : *L'angle de réfraction du rayon transmis est déterminée par la vitesse de groupe et les fractions*

d'énergie réfléchi et transmise sont déterminées par la limite uniforme sur tout compact du champ électromagnétique diffracté (interprété comme le champ réfléchi sur le cristal semi-infini).

Nous utiliserons les résultats établis ici, dans le cas de structures monodimensionnelles, dans l'étude numérique de la troisième partie qui concerne des structures plus complexes.

Nous testerons notre interprétation inspirée de l'optique géométrique dans des cas qui ne rentrent pas dans le cadre de cette deuxième partie, notamment dans le cas d'interfaces planes quelconques et cylindriques séparant le cristal monodimensionnel du milieu extérieur.

Enfin, nous avons réalisé une étude des propriétés des cristaux photoniques monodimensionnels en utilisant une démarche différente dans [60] : cette démarche consiste à étudier les résonances dans un cristal photonique monodimensionnel d'épaisseur finie. Cette multiplication des démarches nous a permis d'améliorer la compréhension du comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique monodimensionnel. Ayant fait l'objet d'une publication [60], cette étude n'apparaît pas dans ce mémoire ; nous contentons de reproduire ici le titre et le résumé original de la publication.

Electromagnetic phenomenological study of photonic band structures

Abstract *It is shown, in the case of one-dimensional photonic crystals, that the transmission gaps are caused by the existence of resonance phenomena inside the layers which constitute the crystal. From a mathematical point of view, these resonances are associated with poles and zeros in the complex plane of the wavenumber k . Transmission gaps are located outside these resonance regions. A phenomenological formula allows us to present quantitatively the transmission inside the gaps. Finally, a synthetic explanation of the properties of doped and non-doped crystals is proposed and it is shown that the transmission peaks inside the gaps of doped photonic crystals are caused by a shift of poles and zeros located inside the resonance regions of non-doped crystals.*

Troisième partie

Etude numérique des propriétés
des cristaux photoniques

Troisième partie

Introduction

Actuellement, l'étude numérique est incontournable pour résoudre rigoureusement les équations de Maxwell dans les cristaux photoniques bi et tridimensionnels. C'est pourquoi une large part de cette thèse a été consacrée à l'élaboration d'un code numérique.

Ce code numérique permet de résoudre les équations de Maxwell en présence d'une structure tridimensionnelle "tas de bois". Nous entendons par structure "tas de bois" un empilement de couches constituées de tiges parallèles, de section rectangulaire, et régulièrement espacées. Les axes des tiges peuvent être dirigés suivant deux directions perpendiculaires. Ce code numérique permet également de résoudre les équations de Maxwell dans des structures mono ou bidimensionnelles constituées de tiges de section rectangulaire (ces structures sont des cas particuliers de structures "tas de bois").

Notre code numérique est spécialement adapté aux structure "tas de bois". Nous utilisons une méthode qui permet de représenter de façon exacte la structure "tas de bois" contrairement aux méthodes usuelles qui approchent les fonctions ε et μ par des séries de Fourier tronquées ; notre code numérique ne comporte pas le principal défaut des codes numériques utilisant les méthodes usuelles.

Nous présentons le code numérique dans le chapitre 5. Nous utilisons la méthode dite des "valeurs propres et fonctions propres exactes" déjà largement utilisée dans le cas des réseaux monodimensionnels [61, 62, 63]. Cette méthode est spécialement adaptée à l'étude des réseaux de tiges de section rectangulaire : en particulier, cette méthode est plus performante que la méthode usuelle qui utilise la base de Fourier [64]. Nous présentons la généralisation de cette méthode pour des structures de type "tas de bois".

Nous présenterons également notre méthode qui permet d'obtenir la relation de dispersion d'un cristal à partir de la matrice de transfert à travers une couche élémentaire du cristal tout en évitant les instabilités numériques.

Notre code numérique permet de modéliser des cristaux photoniques mono et bidimensionnels de formes variées ; nous utilisons ce code pour étudier les propriétés de diffraction de ces cristaux photoniques dans le chapitre 6.

Nous compléterons notre étude de la trajectoire du champ électromagnétique que nous avons abordée d'un point de vue théorique dans la section 2.2 ; nous présenterons des exemples numériques qui mettent en évidence des propriétés de réfraction inhabituels [23].

Nous compléterons notre étude de l'influence des interfaces séparant un cristal photonique du milieu extérieur que nous avons abordée d'un point de vue théorique dans la deuxième partie ; nous établirons une règle qui permet d'estimer *a priori* l'influence d'interfaces de formes quelconques. Nous illustrerons notre règle par des exemples numériques.

Nous étudions les cristaux photoniques “tas de bois” dans le chapitre 7. Nous étudions en particulier le cristal photonique réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* [11, 12].

Nous déterminons avec précision les *gaps* de ce cristal photonique. Nous confirmons alors les résultats numériques établis dans [11, 12, 42].

Enfin, la méthode numérique que nous utilisons nous permet d'étudier les propriétés des cristaux photoniques “tas de bois” d'épaisseur finie. Nous étudierons la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise à travers un cristal photonique “tas de bois” d'épaisseur finie. Nous étudierons également la possibilité d'inhiber l'émission spontanée.

Chapitre 5

Présentation du code numérique

Dans ce chapitre 5 nous présentons le code numérique que nous avons développé durant cette thèse. Ce code numérique permet de résoudre les équations de Maxwell en présence d'une structure tridimensionnelle "tas de bois".

Nous modélisons une structure "tas de bois" par un empilement de réseaux bidimensionnels : un tel réseau est périodique dans deux directions de l'espace et limitée dans la troisième. Nous décrivons cet empilement de réseaux dans la section 5.1.

Nous utilisons dans la section 5.2 les symétries de notre modélisation : nous réalisons une décomposition de Floquet partielle dans les deux directions où la structure est périodique.

Nous pourrions alors présenter la démarche générale de notre code numérique.

Nous présentons dans la section 5.4 le développement du champ électromagnétique à l'intérieur du cristal.

Notre code numérique utilise la méthode des "valeurs propres et fonctions propres exactes". Nous présentons l'adaptation de cette méthode aux structures "tas de bois". Cette adaptation s'avère être une simple formalité depuis que L. Li a généralisé la méthode des "valeurs propres et fonctions propres exactes" pour les réseaux monodimensionnels dans le cas vectoriel (ou incidence conique) [65].

Nous imposons la condition d'onde sortante aux limites du cristal dans la section 5.5. Nous réalisons un test de convergence des efficacités diffractées dans le cas d'un réseau monodimensionnel de tiges diélectriques à section carrées. Nous réalisons également une comparaison de notre code numérique avec un code numérique utilisant une méthode classique.

Nous déterminons la relation de dispersion du cristal photonique à partir de la matrice de transfert à travers la couche élémentaire du cristal (de même que dans la deuxième partie, nous entendons par couche élémentaire la couche (3.5) qui permet d'engendrer tout le cristal). Cette méthode possède de nombreux avantages et est largement utilisée (dans [23, 66] pour les cristaux photoniques bidimensionnels et dans [42, 67] pour les cristaux photoniques tridimensionnels). Toutefois, cette mé-

thode présente *a priori* des instabilités numériques. A notre connaissance, les nombreux auteurs qui utilisent cette méthode n'exposent pas clairement d'algorithme qui permet de s'affranchir des instabilités numériques.

C'est pourquoi nous présentons dans la section 5.6 notre algorithme qui permet d'obtenir sans instabilités numériques les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert à travers une couche élémentaire du cristal.

Enfin, nous réaliserons un test de convergence des valeurs propres de la matrice de transfert à travers une couche élémentaire du cristal dans le cas d'une couche élémentaire constituée de tiges diélectriques à section carrées : nous montrerons la stabilité numérique de notre algorithme.

En conclusion de ce chapitre 5, nous situons les méthodes numériques que nous avons développées parmi les méthodes généralement utilisées.

Nous présentons dans ce chapitre 5 notre code numérique dans le cas où la permittivité ε et la perméabilité μ vérifient les hypothèses (5) et (6) (matériaux sans pertes). La méthode que nous utilisons reste valable dans le cas où la permittivité ε et la perméabilité μ sont des fonctions à valeurs complexes (les fonctions ε et μ représentent alors des matériaux possédant des pertes) ; bien que n'apparaissant pas dans cette présentation, notre code numérique permet de résoudre les équations de Maxwell dans les structures "tas de bois" dans le cas général où les matériaux possèdent des pertes.

5.1 Modélisation de la structure "tas de bois" : l'empilement de réseaux

Nous utilisons dans cette partie le repère orthonormé (3.1) que nous avons défini dans la deuxième partie.

5.1.1 Description de l'empilement de réseaux

L'empilement de réseaux est une structure périodique dans deux directions de l'espace et limitée dans la troisième direction de l'espace.

Soient d_1 et d_2 les deux translations élémentaires de l'empilement de réseaux. Nous considérons le cas particulier où ces deux translations élémentaires d_1 et d_2 sont orthogonales. Nous pouvons donc choisir le repère orthonormé (3.1) tel que les deux translations élémentaires d_1 et d_2 soient colinéaires aux vecteurs e_1 et e_2 (figure 5.1). Soient h_1 et h_2 les périodes spatiales de l'empilement de réseaux.

$$d_1 = h_1 e_1 \quad \text{et} \quad d_2 = h_2 e_2. \quad (5.1)$$

Le réseau Γ_{12} associé à l'empilement de réseaux est l'ensemble des points de coordonnées entières dans la base (d_1, d_2) .

$$\Gamma_{12} = \{\gamma = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 \mid (\gamma_1/h_1), (\gamma_2/h_2) \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.2)$$

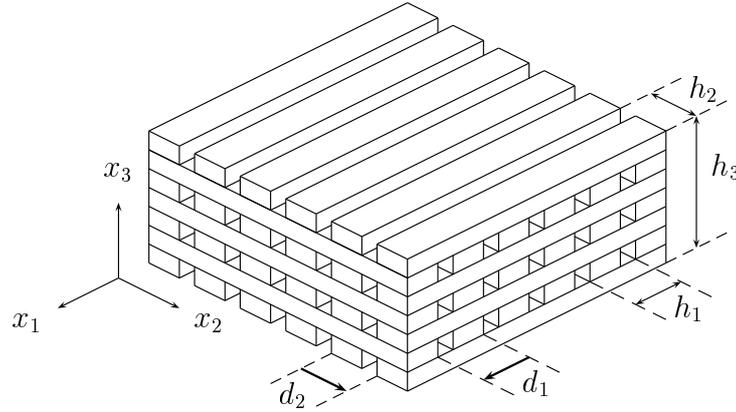


FIG. 5.1: Exemple d'empilement de réseaux d'épaisseur totale h_3 . Nous avons représenté les translations élémentaires d_1 et d_2 associées aux périodes spatiales h_1 et h_2 .

La maille élémentaire du réseau Γ_{12} est le rectangle V_{12} engendré par les deux translations élémentaires d_1 et d_2 .

$$V_{12} = \{x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0, h_1], x_2 \in [0, h_2]\}. \quad (5.3)$$

Dans ce modèle, la permittivité ε et la perméabilité μ qui caractérisent les propriétés de la matière sont des fonctions Γ_{12} -périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \gamma \in \Gamma_{12} : \varepsilon(x + \gamma) = \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \mu(x + \gamma) = \mu(x). \quad (5.4)$$

Enfin, l'empilement de réseaux est limité dans la direction e_3 . L'empilement de réseaux se trouve donc entre un superstrat homogène, caractérisé par les constantes positives ε^u et μ^u , et un substrat homogène, caractérisé par les constantes positives ε^d et μ^d . Soit h_3 l'épaisseur totale de l'empilement de réseaux (figure 5.1). Alors, la permittivité ε et la perméabilité μ vérifient à l'extérieur de la structure

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0 &\implies \varepsilon(x) = \varepsilon^u > 0 \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu^u > 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \leq -h_3 &\implies \varepsilon(x) = \varepsilon^d > 0 \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu^d > 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.1.2 Description de la structure “tas de bois”

Une structure “tas de bois” est un empilement dans la troisième direction e_3 de L couches lamellaires d'épaisseur $h_{3,l} > 0$, $l \in \{1, \dots, L\}$ (figure 5.2). L'épaisseur totale de la structure est donc

$$h_3 = \sum_{l=1}^L h_{3,l}. \quad (5.6)$$

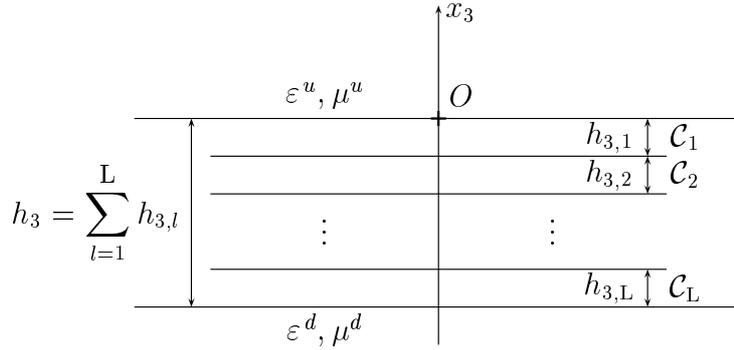


FIG. 5.2: Une structure “tas de bois” constituée de L couches lamellaires d’épaisseur $h_{3,l}$, $l \in \{1, \dots, L\}$. Les constantes ε^u et μ^u caractérisent le superstrat et les constantes ε^d et μ^d caractérisent le substrat.

Soit $\{x_{3,l} \mid l \in \{0, \dots, L\}\}$ l’ensemble des altitudes qui déterminent l’ensemble des interfaces planes horizontales séparant les différentes couches lamellaires.

$$x_{3,0} = 0 \quad \text{et} \quad x_{3,l} = - \sum_{j=1}^l h_{3,j} \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}. \quad (5.7)$$

Soit \mathcal{C}_l la couche lamellaire comprise entre les interfaces planes horizontales d’équation $x_3 = x_{3,l-1}$ et $x_3 = x_{3,l}$ pour tout $l \in \{1, \dots, L\}$.

$$\mathcal{C}_l = \{x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x_{3,l} \leq x_3 \leq x_{3,l-1}\}. \quad (5.8)$$

Chaque couche lamellaire \mathcal{C}_l est constituée de tiges homogènes, parallèles, de section rectangulaire, et dont les axes sont dirigés suivant la direction e_1 ou la direction e_2 (figure 5.3). Les fonctions ε et μ dépendent donc d’une seule variable dans chaque couche lamellaire. Soit $s(l) \in \{1, 2\}$ le paramètre qui permet de déterminer la dépendance des fonctions ε et μ dans la couche lamellaire l : $s(l)$ est égal à 2 si les axes

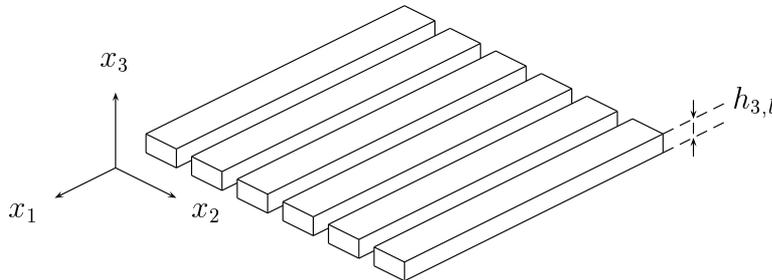


FIG. 5.3: Exemple de couche lamellaire \mathcal{C}_l d’épaisseur $h_{3,l}$ constituée de tiges de section rectangulaire dont les axes sont dirigés suivant la direction e_1 . Les fonctions ε et μ ne dépendent que de la variable x_2 dans cette couche lamellaire \mathcal{C}_l : $s(l) = 2 \implies \varepsilon(x) = \varepsilon(x_2)$ et $\mu(x) = \mu(x_2)$ pour tout $x \in \mathcal{C}_l$.

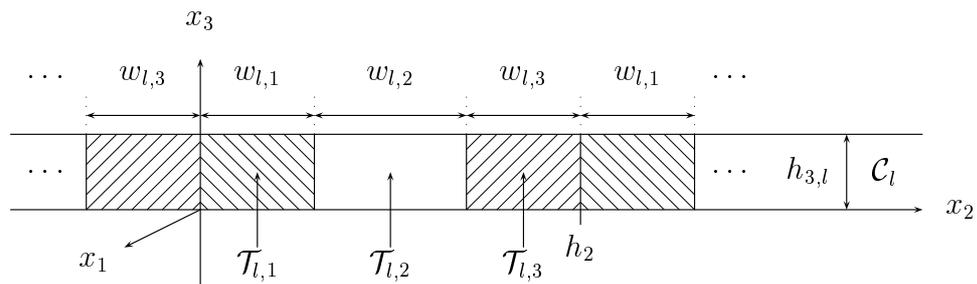


FIG. 5.4: Coupe d'une couche lamellaire \mathcal{C}_l d'épaisseur $h_{3,l}$ constituée de $M_l = 3$ tiges homogènes dont les axes sont dirigés suivant la direction e_1 ($s(l) = 2$).

des tiges de la couche lamellaire \mathcal{C}_l sont dirigés dans la direction e_1 et inversement.

$$\forall l \in \{1, \dots, L\} : x \in \mathcal{C}_l \implies \varepsilon(x) = \varepsilon(x_{s(l)}) \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu(x_{s(l)}). \quad (5.9)$$

Enfin, chaque période de la couche lamellaire \mathcal{C}_l est constituée de M_l tiges homogènes de largeur $w_{l,m}$ et caractérisées par les constantes positives $\varepsilon_{l,m}$ et $\mu_{l,m}$ (figure 5.4). Les largeurs des tiges homogènes vérifient donc

$$\forall l \in \{1, \dots, L\} : h_{s(l)} = \sum_{m=1}^{M_l} w_{l,m}. \quad (5.10)$$

Soit $\{x_{s(l),l,m} \mid l \in \{0, \dots, M_l\}\}$ l'ensemble des abscisses qui déterminent l'ensemble des interfaces planes verticales séparant les différentes tiges homogènes dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l .

$$x_{s(l),l,0} = 0 \quad \text{et} \quad x_{s(l),l,m} = \sum_{j=1}^m w_{l,j} \quad \forall m \in \{1, \dots, M_l\}. \quad (5.11)$$

Soit $\mathcal{T}_{l,m}$ la tige (ou lamelle) de la couche lamellaire \mathcal{C}_l comprise entre les interfaces planes verticales d'équation $x_{s(l)} = x_{s(l),l,m-1}$ et $x_{s(l)} = x_{s(l),l,m}$ pour tout $(l, m) \in \{1, \dots, L\} \times \{1, \dots, M_l\}$.

$$\mathcal{T}_{l,m} = \{x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathcal{C}_l \mid x_{s(l),l,m-1} \leq x_{s(l)} \leq x_{s(l),l,m}\}. \quad (5.12)$$

Alors, les fonctions ε et μ vérifient à l'intérieur de la structure "tas de bois" pour tout $(l, m) \in \{1, \dots, L\} \times \{1, \dots, M_l\}$:

$$x \in \mathcal{T}_{l,m} \implies \varepsilon(x) = \varepsilon_{l,m} > 0 \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu_{l,m} > 0. \quad (5.13)$$

5.2 Le champ électromagnétique harmonique en présence d'un réseau bidimensionnel

Dans cette section, nous présentons les hypothèses que nous faisons sur le champ électromagnétique harmonique en présence d'un réseau bidimensionnel. Nous utilisons ensuite les symétries du réseau bidimensionnel pour simplifier la résolution des équations de Maxwell.

5.2.1 Hypothèse sur le champ électromagnétique harmonique

Le champ électromagnétique harmonique est représenté par les deux champs complexes E_ω et H_ω qui dépendent de la seule variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$ (3).

Hypothèse III.1 Nous cherchons des champs complexes E_ω et H_ω tels que, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$, les fonctions $E_\omega(\cdot, \cdot, x_3)$ et $H_\omega(\cdot, \cdot, x_3)$ soient de carré sommable.

$$\int_{\mathbb{R}^2} |E_\omega(x_1, x_2, x_3)|^2 + |H_\omega(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_1 dx_2 < \infty \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}. \quad (5.14)$$

Le code numérique permet donc de déterminer les champs complexes E_ω et H_ω vérifiant les équations de Maxwell harmoniques (4) et l'hypothèse (5.14) en présence de la structure "tas de bois" que nous avons décrite dans la section précédente.

5.2.2 Conséquence des symétries : décomposition de Floquet partielle

Les fonctions ε et μ étant Γ_{12} -périodiques, la structure de type "tas de bois" est invariante si nous appliquons toute translation d'un vecteur $\gamma \in \Gamma_{12}$. Nous pouvons donc réaliser une décomposition de Floquet du problème général.

La transformation de Floquet-Bloch associée au réseau bidimensionnel Γ_{12} Par analogie avec la section 1.7.1, nous pouvons définir formellement la transformation de Floquet-Bloch \mathcal{U}_{12} associée au réseau Γ_{12} . Pour tout $G = E_\omega, H_\omega$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $(k_1, k_2) \in [-1/2, 1/2]^2$:

$$(\mathcal{U}_{12}G)(x, k_1, k_2) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{12}} G(x + \gamma) \exp\{-2i\pi[k_1(\gamma_1/h_1) + k_2(\gamma_2/h_2)]\}. \quad (5.15)$$

La transformation de Floquet-Bloch inverse associée au réseau bidimensionnel Γ_{12} De même que dans la section 1.7.1, nous pouvons recomposer les champs E_ω et H_ω en utilisant la transformation de Floquet-Bloch inverse. Pour tout $G = E_\omega, H_\omega$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$G(x) = [\mathcal{U}_{12}^{-1}(\mathcal{U}_{12}G)](x) = \int_{[-1/2, 1/2]^2} (\mathcal{U}_{12}G)(x, k_1, k_2) dk_1 dk_2. \quad (5.16)$$

Le problème général qui consiste à résoudre les équations de Maxwell harmoniques (4) se décompose donc en une famille de problèmes élémentaires indexée par le paramètre (k_1, k_2) décrivant l'ensemble $[-1/2, 1/2]^2$. A ce stade, nous fixons le paramètre $(k_1, k_2) \in [-1/2, 1/2]^2$ et nous résolvons le problème élémentaire associé au paramètre (k_1, k_2) . Nous ne faisons plus apparaître la fréquence ω et le paramètre (k_1, k_2) : nous notons \tilde{E} et \tilde{H} les fonctions $(\mathcal{U}_{12}E_\omega)(\cdot, k_1, k_2)$ et $(\mathcal{U}_{12}H_\omega)(\cdot, k_1, k_2)$ (définis à partir de la transformation de Floquet-Bloch (5.15)).

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \tilde{E}(x) = (\mathcal{U}_{12}E_\omega)(x, k_1, k_2) \quad \text{et} \quad \tilde{H}(x) = (\mathcal{U}_{12}H_\omega)(x, k_1, k_2), \quad (5.17)$$

où

$$k_1, k_2 \in [-1/2, 1/2]. \quad (5.18)$$

Dorénavant, toutes les grandeurs dépendant de la fréquence ω et des deux composantes (k_1, k_2) fixées comme paramètres seront coiffées du symbole \sim . Chaque problème élémentaire consiste à résoudre l'équation

$$\nabla \times \tilde{E} - i\omega\mu\tilde{H} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times \tilde{H} + i\omega\varepsilon\tilde{E} = 0, \quad (5.19)$$

où les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} sont localement de carré sommable par rapport aux variables x_1 et x_2 ,

$$\int_{V_{12}} |\tilde{E}(x_1, x_2, x_3)|^2 + |\tilde{H}(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_1 dx_2 < \infty \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}, \quad (5.20)$$

et où les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} vérifient les conditions de Bloch à la frontière de la maille élémentaire V_{12} . Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\gamma \in \Gamma_{12}$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x + \gamma) &= \exp\{2i\pi[k_1(\gamma_1/h_1) + k_2(\gamma_2/h_2)]\} \tilde{E}(x), \\ \tilde{H}(x + \gamma) &= \exp\{2i\pi[k_1(\gamma_1/h_1) + k_2(\gamma_2/h_2)]\} \tilde{H}(x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.3 Démarche générale du code numérique : la méthode réseau

Notre démarche générale pour résoudre les équations de Maxwell dans l'empilement de réseaux comporte trois étapes.

La première étape consiste à résoudre les équations de Maxwell associées au problème élémentaire à l'intérieur du cristal (le paramètre $(k_1, k_2) \in [-1/2, 1/2]^2$ étant fixé) : nous déterminons dans la section 5.4 l'ensemble des fonctions qui vérifient l'équation (5.19) et les conditions (5.20, 5.21) à l'intérieur du cristal.

La deuxième étape consiste à imposer les conditions aux limites du cristal ; nous imposons deux types de conditions aux limites du cristal. La condition d'onde sortante que nous imposons dans la section 5.5 permet de déterminer le champ électromagnétique en présence d'une structure "tas de bois" d'épaisseur finie. La condition de Bloch que nous imposons dans la section 5.6 permet d'obtenir le champ électromagnétique en présence d'un cristal parfait.

Enfin, la troisième étape consiste à recomposer le problème principal à partir de l'ensemble des problèmes élémentaires. Nous utilisons la transformation de Floquet-Bloch inverse (5.16) pour reconstruire les champs complexes E_ω et H_ω vérifiant l'équation (4) et l'hypothèse (5.14). Nous réalisons la réunion de toutes les valeurs propres associées aux solutions dans le cristal parfait pour obtenir le spectre (1.37) de l'opérateur de Maxwell et la relation de dispersion (1.38).

5.4 Développement du champ électromagnétique dans le cristal

Nous commençons par développer le champ électromagnétique dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l (le champ électromagnétique pouvant être développé de façon analogue dans les autres couches lamellaires). Nous obtenons alors la relation entre les valeurs du champ électromagnétique sur les interfaces planes horizontales d'équation $x_3 = x_{3,l-1}$ et $x_3 = x_{3,l}$ qui délimitent la couche lamellaire \mathcal{C}_l . Nous empilons ensuite les couches lamellaires pour obtenir la relation entre les valeurs du champ électromagnétique sur les interfaces planes horizontales d'équation $x_{3,0} = 0$ et $x_{3,L} = -h_3$ qui séparent la structure de type "tas de bois" du milieu extérieur.

Nous considérons la couche lamellaire \mathcal{C}_l . Nous supposons que les tiges constituant cette couche lamellaire sont dirigées suivant la direction e_1 (comme représenté sur les figures 5.3 et 5.4).

$$s(l) = 2 \implies \varepsilon(x) = \varepsilon(x_2) \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu(x_2) \quad \forall x \in \mathcal{C}_l. \quad (5.22)$$

Dans ce cas (5.22), nous développons la dépendance en x_1 des fonctions \tilde{E} et \tilde{H} dans la base de Fourier (section 5.4.1), nous développons la dépendance en x_2 des fonctions \tilde{E} et \tilde{H} dans la base des fonctions propres exactes (section 5.4.3) puis nous résolvons les équations de Maxwell (5.19) pour déterminer la dépendance en x_3 des fonctions \tilde{E} et \tilde{H} (section 5.4.4).

5.4.1 Développement dans la base de Fourier

Nous développons la dépendance en x_1 des fonctions \tilde{E} et \tilde{H} dans la base de Fourier.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{C}_l : \tilde{E}(x) &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{E}_{n_1}(x_2, x_3) \exp(ik_{1,n_1}x_1), \\ \forall x \in \mathcal{C}_l : \tilde{H}(x) &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_{n_1}(x_2, x_3) \exp(ik_{1,n_1}x_1), \end{aligned} \quad (5.23)$$

où

$$\forall n_1 \in \mathbb{Z} : k_{1,n_1} = (2\pi/h_1)(k_1 + n_1). \quad (5.24)$$

Nous projetons l'équation (5.19) sur le vecteur $x_1 \mapsto \exp(ik_{1,n_1}x_1)$ en utilisant le produit scalaire usuel

$$(G, G') \longmapsto (1/h_1) \int_{[0,h_1]} \overline{G(x_1)} G'(x_1) dx_1, \quad (5.25)$$

où G et G' sont des fonctions localement de carré sommable de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Alors, l'équation (5.19) est équivalente à

$$\begin{aligned} (ik_{1,n_1}e_1 + \partial_2e_2 + \partial_3e_3) \times \tilde{E}_{n_1} &= i\omega\mu\tilde{H}_{n_1} \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \\ (ik_{1,n_1}e_1 + \partial_2e_2 + \partial_3e_3) \times \tilde{H}_{n_1} &= -i\omega\varepsilon\tilde{E}_{n_1} \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Nous développons cette équation (5.26). Nous obtenons alors une équation comprenant les seules composantes \tilde{E}_{1,n_1} et \tilde{H}_{1,n_1} des fonctions \tilde{E}_{n_1} et \tilde{H}_{n_1} .

$$\begin{bmatrix} M_{\varepsilon,n_1} & -N_{\varepsilon,n_1} \\ N_{\mu,n_1} & M_{\mu,n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{1,n_1} \\ \tilde{H}_{1,n_1} \end{bmatrix} = 0 \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \quad (5.27)$$

où pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\nu = \varepsilon, \mu$:

$$\begin{aligned} M_{\nu,n_1} &= \partial_3^2 + \omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2 + \frac{\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2}{i\omega\nu} \partial_2 \frac{i\omega\nu}{\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2} \partial_2, \\ N_{\nu,n_1} &= -ik_{1,n_1} \frac{\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2}{i\omega\nu} \left(\frac{d}{dx_2} \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2} \right) \partial_3. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Les quatre autres composantes \tilde{E}_{2,n_1} , \tilde{E}_{3,n_1} , \tilde{H}_{2,n_1} et \tilde{H}_{3,n_1} des fonctions \tilde{E}_{n_1} et \tilde{H}_{n_1} s'expriment à partir des deux composantes \tilde{E}_{1,n_1} et \tilde{H}_{1,n_1} .

Pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{2,n_1} &= (\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2)^{-1} (ik_{1,n_1} \partial_2 \tilde{E}_{1,n_1} + i\omega\mu \partial_3 \tilde{H}_{1,n_1}), \\ \tilde{E}_{3,n_1} &= (\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2)^{-1} (ik_{1,n_1} \partial_3 \tilde{E}_{1,n_1} - i\omega\mu \partial_2 \tilde{H}_{1,n_1}), \\ \tilde{H}_{2,n_1} &= (\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2)^{-1} (ik_{1,n_1} \partial_2 \tilde{H}_{1,n_1} - i\omega\varepsilon \partial_3 \tilde{E}_{1,n_1}), \\ \tilde{H}_{3,n_1} &= (\omega^2 \varepsilon \mu - k_{1,n_1}^2)^{-1} (ik_{1,n_1} \partial_3 \tilde{H}_{1,n_1} + i\omega\varepsilon \partial_2 \tilde{E}_{1,n_1}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Récapitulation Nous avons développé la dépendance en x_1 des fonctions \tilde{E} et \tilde{H} dans la base de Fourier. Les équations de Maxwell harmoniques (5.19) se réduisent alors à l'équation (5.27) comprenant les deux composantes \tilde{E}_{1,n_1} et \tilde{H}_{1,n_1} des fonctions \tilde{E}_{n_1} et \tilde{H}_{n_1} . Cette équation (5.27) est *a priori* vectorielle : les deux composantes \tilde{E}_{1,n_1} , \tilde{H}_{1,n_1} sont *a priori* couplées.

Seulement, notre équation (5.27) est analogue à l'équation (14) obtenue dans l'étude des réseaux lamellaires monodimensionnels dans le cas vectoriel (ou incidence conique) [65]. Nous pouvons donc utiliser le résultat établi par L. Li dans [65] pour simplifier notre équation (5.27).

5.4.2 Le résultat de L. Li : réduction du problème général à deux problèmes scalaires indépendants

Définition des champs TE et TM dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l D'après (5.22), les fonctions ε et μ ne dépendent que de la seule variable x_2 dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l . En présence d'une structure invariante dans les directions e_1 et e_3 , un champ électromagnétique est de polarisation TE si la deuxième composante du champ électrique est nulle et, est de polarisation TM si la deuxième composante du champ magnétique est nulle. Nous définissons les champs de polarisation TE et TM dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l par analogie avec les structures monodimensionnelles

(dans la section 3.2, le cristal photonique monodimensionnel est invariant dans les directions e_1 et e_2). Soient $(\tilde{E}_{n_1}^{(e)}, \tilde{H}_{n_1}^{(e)})$ et $(\tilde{E}_{n_1}^{(m)}, \tilde{H}_{n_1}^{(m)})$ les fonctions représentant les champs de polarisation TE et TM pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$. Alors, d'après (5.29),

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{2,n_1}^{(e)} = 0 &\implies ik_{1,n_1} \partial_2 \tilde{E}_{1,n_1}^{(e)} = i\omega\mu \partial_3 \tilde{H}_{1,n_1}^{(e)} \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{H}_{2,n_1}^{(m)} = 0 &\implies ik_{1,n_1} \partial_2 \tilde{H}_{1,n_1}^{(m)} = -i\omega\varepsilon \partial_3 \tilde{E}_{1,n_1}^{(m)} \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de L. Li.

Le résultat de L. Li [65, annexe A] *Toute solution $(\tilde{E}_{1,n_1}, \tilde{H}_{1,n_1})$ de l'équation (5.27) peut être décomposée en une partie de polarisation TE et une partie de polarisation TM.*

$$\forall n_1 \in \mathbb{Z} : (\tilde{E}_{1,n_1}, \tilde{H}_{1,n_1}) = (\tilde{E}_{n_1}^{(e)}, \tilde{H}_{n_1}^{(e)}) + (\tilde{E}_{n_1}^{(m)}, \tilde{H}_{n_1}^{(m)}). \quad (5.31)$$

Cette décomposition est en général unique (le cas où la décomposition n'est pas unique est mentionné dans [65, annexe A]). Enfin, l'équation (5.27) se réduit au système de deux équations scalaires et indépendantes

$$\begin{aligned} (\partial_3^2 - k_{1,n_1}^2 + \mu \partial_2 \mu^{-1} \partial_2 + \omega^2 \varepsilon \mu) \tilde{E}_{1,n_1}^{(e)} &= 0 \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \\ (\partial_3^2 - k_{1,n_1}^2 + \varepsilon \partial_2 \varepsilon^{-1} \partial_2 + \omega^2 \varepsilon \mu) \tilde{H}_{1,n_1}^{(m)} &= 0 \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les autres parties $\tilde{H}_{n_1}^{(e)}$ et $\tilde{E}_{n_1}^{(m)}$ (5.31) des fonctions \tilde{E}_{1,n_1} et \tilde{H}_{1,n_1} se déduisent de $E_{1,n_1}^{(e)}$ et $H_{1,n_1}^{(m)}$ avec la relation (5.30).

Conclusion Le résultat de L. Li permet de simplifier considérablement le problème. L'équation (5.27) *a priori* vectorielle se réduit au système de deux équations scalaires et indépendantes (5.32). Nous pouvons donc étudier ces deux équations séparément. Soient U_{ν,n_1} et ν définis suivant la polarisation.

$$\begin{aligned} \text{Polarisation TE} : U_{\nu,n_1} &= \tilde{E}_{1,n_1}^{(e)} \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \nu = \mu. \\ \text{Polarisation TM} : U_{\nu,n_1} &= \tilde{H}_{1,n_1}^{(m)} \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \nu = \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Alors, d'après (5.32), le problème se réduit à l'équation

$$(\partial_3^2 - k_{1,n_1}^2 + L_\nu) U_{\nu,n_1} = 0 \quad \forall n_1 \in \mathbb{Z}, \quad (5.34)$$

où

$$L_\nu = \nu \partial_2 \nu^{-1} \partial_2 + \omega^2 \varepsilon \mu. \quad (5.35)$$

D'après (5.20,5.21), l'opérateur L_ν agit dans $L_{k_2}^2([0, h_2], \nu^{-1} dx_2; \mathbb{C})$, l'espace de Hilbert des fonctions G localement de carré sommable, vérifiant la condition de Bloch

$$G(x_2 + n_2 h_2) = \exp(2i\pi n_2 k_2) G(x_2) \quad \forall n_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.36)$$

et muni du produit scalaire

$$G, G' \longmapsto (1/h_2) \int_{[0, h_2]} \overline{G(x_2)} G'(x_2) \nu^{-1}(x_2) dx_2. \quad (5.37)$$

5.4.3 Développement dans la base des fonctions propres exactes

L'opérateur L_ν est autoadjoint dans l'espace de Hilbert $L^2_{k_2}([0, h_2], \nu^{-1} dx_2; \mathbb{C})$. Alors, le spectre de cet opérateur L_ν est constitué de valeurs propres réelles et les vecteurs propres associés forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $L^2_{k_2}([0, h_2], \nu^{-1} dx_2; \mathbb{C})$. Soient $\{\lambda_{\nu, n_2} \mid n_2 \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\varphi_{\nu, n_2} \mid n_2 \in \mathbb{Z}\}$ les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur L_ν .

$$\forall n_2 \in \mathbb{Z} : L_\nu \varphi_{\nu, n_2} = \lambda_{\nu, n_2} \varphi_{\nu, n_2}. \quad (5.38)$$

Nous développons la dépendance en x_2 de la fonction U_{ν, n_1} dans la base des fonctions propres de l'opérateur L_ν .

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, \forall x_3 \in [x_{3, l-1}, x_{3, l}] : U_{\nu, n_1}(x_2, x_3) = \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} U_{\nu, n_1, n_2}(x_3) \varphi_{\nu, n_2}(x_2). \quad (5.39)$$

C'est ce développement (5.39) que nous qualifions de développement dans la base des fonctions propres exactes. Dans le cas particulier où les fonctions ε et μ sont indépendantes de la variable x_2 (la couche lamellaire \mathcal{C}_l est alors une couche homogène) la base des fonctions propres exactes coïncide avec la base de Fourier (d'après l'expression (5.35) de l'opérateur L_ν). C'est pourquoi nous avons développé la dépendance en x_1 des fonctions \tilde{E} et \tilde{H} dans la base de Fourier (5.23).

Le développement (5.39) suppose que nous connaissons les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur L_ν .

Equation vérifiée par les valeurs propres de l'opérateur L_ν L'équation aux valeurs propres (5.38) est identique à l'équation (3.19) rencontrée dans l'étude du cristal photonique monodimensionnel de la deuxième partie si nous remplaçons dans (3.19) la variable x_3 par la variable x_2 , la variable $\omega^2 \alpha_1^2$ par la valeur propre λ_{ν, n_2} et la fonction $\hat{U}(\alpha_1, \cdot)$ par le vecteur propre φ_{ν, n_2} . Nous avons imposé la condition de Bloch (4.2) à la frontière de la couche élémentaire du cristal photonique monodimensionnel dans la section 4.1.1 : les fonctions $\hat{U}(\alpha_1, \cdot)$ vérifiant l'équation (3.19) et la condition de Bloch (4.2) sont déterminées par la relation de dispersion (4.3). Alors, si nous remplaçons k_3 par k_2 et $\omega^2 \alpha_1^2$ par λ_{ν, n_2} dans la relation de dispersion (4.3), nous obtenons l'équation vérifiée par les valeurs propres de l'opérateur L_ν .

$$\forall n_2 \in \mathbb{Z} : \cos(2\pi k_2) = \text{tr} T_{\nu, l}(\omega, \sqrt{\lambda_{\nu, n_2}}/\omega), \quad (5.40)$$

la matrice $T_{\nu, l}$ dépendant de la polarisation (ou la fonction ν) et, de même que les fonctions ε et μ , de la couche lamellaire \mathcal{C}_l . L'expression de la matrice $T_{\nu, l}$ dans le cas particulier de la couche lamellaire \mathcal{C}_l (l'expression des fonctions ε et μ est alors (5.13)) est

$$T_{\nu, l} = T_{\nu, l, M_l} \cdots T_{\nu, l, 2} T_{\nu, l, 1}, \quad (5.41)$$

où pour tout $(l, m) \in \{1, \dots, L\} \times \{1, \dots, M_l\}$:

$$T_{\nu, l, m} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{\nu, l, m} w_{l, m}) & \nu_{l, m} \beta_{\nu, l, m}^{-1} \sin(\beta_{\nu, l, m} w_{l, m}) \\ -\nu_{l, m}^{-1} \beta_{\nu, l, m} \sin(\beta_{\nu, l, m} w_{l, m}) & \cos(\beta_{\nu, l, m} w_{l, m}) \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

avec

$$\beta_{\nu,l,m} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_{l,m} \mu_{l,m} - \lambda_{\nu,n_2}} \quad \text{et} \quad \nu_{l,m} = \nu(x) \quad \forall x \in \mathcal{T}_{l,m}. \quad (5.43)$$

Enfin, l'équation (5.40) vérifiée par les valeurs propres de l'opérateur L_ν peut présenter des instabilités numériques. C'est pourquoi nous ne réalisons pas directement le produit des matrices (5.42) comme dans l'équation (5.40). Nous utilisons d'abord un algorithme d'empilement analogue à celui que nous présentons dans la section 5.4.5. Nous utilisons ensuite une expression de la relation de dispersion analogue à celle que nous présentons dans la section 5.6.2.

Détermination des valeurs propres de l'opérateur L_ν dans le cas de matériaux sans pertes Dans le cas où les fonctions ε et μ sont réelles, l'opérateur L_ν est autoadjoint et ses valeurs propres sont réelles. De plus, d'après son expression (5.35), l'opérateur L_ν est semi-borné.

$$L_\nu \leq \omega^2 \varepsilon_+ \mu_+. \quad (5.44)$$

Les valeurs propres de l'opérateur L_ν sont donc toutes inférieures à la constante positive $\omega^2 \varepsilon_+ \mu_+$.

$$\forall n_2 \in \mathbb{Z} : \lambda_{\nu,n_2} \in] -\infty, \omega^2 \varepsilon_+ \mu_+]. \quad (5.45)$$

Cette propriété (5.45) implique que la méthode numérique est particulièrement bien adaptée à la recherche des valeurs propres de l'opérateur L_ν : il suffit de déterminer les solutions de l'équation (5.40) sur le demi-axe réel $] -\infty, \omega^2 \varepsilon_+ \mu_+]$. Enfin, l'existence de couples de valeurs propres très proches peut constituer une difficulté. C'est pourquoi nous avons développé une recherche des solutions de l'équation (5.40) qui prend en compte la dérivée (par rapport à λ_{ν,n_2}) de la trace de la matrice $T_{\nu,l}$ (l'expression analytique de la dérivée de la matrice $T_{\nu,l}$ est déduite de l'expression analytique (5.41)).

Détermination des valeurs propres de l'opérateur L_ν dans le cas de matériaux avec pertes Le développement du champ électromagnétique dans la base des fonctions propres exactes reste valable dans le cas de matériaux avec pertes. La seule difficulté supplémentaire réside dans la recherche des valeurs propres de l'opérateur L_ν . Dans le cas où les fonctions ε et μ ne sont plus réelles, l'opérateur L_ν n'est plus autoadjoint. Les valeurs propres de l'opérateur L_ν sont dans le plan complexe. Nous utilisons la méthode qui consiste à déduire les valeurs complexes des valeurs propres réelles (de l'opérateur L_ν sans pertes) par prolongement analytique dans le plan complexe [68]. Enfin, une autre méthode consiste à estimer directement les valeurs propres complexes au moyen d'une base sophistiquée puis à raffiner ces estimations numériquement [69].

Détermination des vecteurs propres de l'opérateur L_ν Nous déterminons l'expression des vecteurs propres de l'opérateur L_ν à partir des valeurs propres de l'opérateur L_ν et de la matrice $T_{\nu,l}$. Cette méthode utilisée sans précautions peut présenter des instabilités numériques. Nous utilisons un algorithme analogue à celui que nous présentons dans la section 5.6 pour déterminer l'expression des vecteurs propres sur les interfaces planes verticales d'équation $x_2 = 0$ et $x_2 = h_2$ qui délimitent la maille élémentaire de la couche lamellaire. Nous utilisons ensuite un algorithme d'empilement analogue à celui que nous présentons dans la section 5.4.5 pour déterminer l'expression des vecteurs propres dans toute la couche lamellaire.

5.4.4 Développement du champ électromagnétique dans une couche lamellaire

Nous achevons dans cette section 5.4.4 le développement du champ électromagnétique. Nous projetons l'équation (5.34) sur le vecteur propre φ_{ν,n_2} en utilisant le produit scalaire (5.37). L'équation (5.34) est équivalente à

$$(\partial_3^2 - k_{1,n_1}^2 + \lambda_{\nu,n_2})U_{\nu,n_1,n_2} = 0 \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \quad (5.46)$$

La solution générale de cette équation est

$$U_{\nu,n_1,n_2} \underset{\bar{\nu},n_1,n_2}{=} A_{\bar{\nu},n_1,n_2}^c \psi_{\nu,n_1,n_2}^c + A_{\nu,n_1,n_2}^s \psi_{\nu,n_1,n_2}^s \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad (5.47)$$

où

$$A_{\bar{\nu},n_1,n_2}^c, A_{\nu,n_1,n_2}^s \in \mathbb{C} \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad (5.48)$$

et pour tout $x_3 \in [x_{3,l}, x_{3,l-1}]$:

$$\begin{aligned} \psi_{\nu,n_1,n_2}^c(x_3) &= \cos \left(\sqrt{-k_{1,n_1}^2 + \lambda_{\nu,n_2}} x_3 \right) \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \\ \psi_{\nu,n_1,n_2}^s(x_3) &= \sin \left(\sqrt{-k_{1,n_1}^2 + \lambda_{\nu,n_2}} x_3 \right) \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Récapitulation La résolution des équations de Maxwell dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l nous a conduit jusqu'à l'expression (5.47) de l'ensemble des fonctions U_{ν,n_1,n_2} . D'après le raisonnement que nous avons réalisé dans les sections 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4, cette expression (5.47) nous permet d'obtenir une expression algébrique de la totalité du champ électromagnétique dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l : les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} s'expriment à partir de l'ensemble des coefficients complexes $\{A_{\varepsilon,n_1,n_2}^c, A_{\varepsilon,n_1,n_2}^s, A_{\mu,n_1,n_2}^c, A_{\mu,n_1,n_2}^s \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ dans la couche lamellaire \mathcal{C}_l .

Nous pouvons de façon analogue exprimer la totalité du champ électromagnétique dans toutes les couches lamellaires \mathcal{C}_l , $l \in \{1, \dots, L\}$.

5.4.5 Algorithme d'empilement des couches lamellaires

Nous avons obtenu une expression du champ électromagnétique dans l'ensemble des couches lamellaires \mathcal{C}_l , $l \in \{1, \dots, L\}$. Dans cette section, nous raccordons ces différentes solutions en utilisant la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique au passage des interfaces planes horizontales qui séparent les différentes couches lamellaires. Nous utilisons un algorithme d'empilement de type matrice impédance (ou algorithme de type matrice R [70]).

Définition des composantes tangentielles du champ électromagnétique sur les interfaces planes séparant les couches lamellaires Soient $\tilde{E}_1^l, \tilde{E}_2^l, \tilde{H}_1^l$ et

\tilde{H}_2^l les composantes tangentielles du champ électromagnétique sur l'interface plane horizontale d'équation $x_3 = x_{3,l}$. Pour tout $l \in \{0, \dots, L\}$ et pour tout $s = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_s^l(x_1, x_2) &= \tilde{E}_s(x_1, x_2, x_{3,l}) \quad \forall (x_1, x_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2], \\ \tilde{H}_s^l(x_1, x_2) &= \tilde{H}_s(x_1, x_2, x_{3,l}) \quad \forall (x_1, x_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2].\end{aligned}\tag{5.50}$$

Nous développons dans la base de Fourier ces composantes tangentielles. Pour tout $l \in \{0, \dots, L\}$, pour tout $s = 1, 2$ et pour tout $(x_1, x_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]$:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_s^l(x_1, x_2) &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{E}_{s, n_1, n_2}^l \exp(ik_{1, n_1} x_1) \exp(ik_{2, n_2} x_2), \\ \tilde{H}_s^l(x_1, x_2) &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_{s, n_1, n_2}^l \exp(ik_{1, n_1} x_1) \exp(ik_{2, n_2} x_2),\end{aligned}\tag{5.51}$$

où l'expression de k_{1, n_1} est (5.24) et

$$\forall n_2 \in \mathbb{Z} : k_{2, n_2} = (2\pi/h_2)(k_2 + n_2).\tag{5.52}$$

Soient \tilde{E}^l et \tilde{H}^l les vecteurs qui contiennent l'ensemble des coefficients complexes du développement de Fourier (5.51) représentant les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique. Pour tout $l \in \{0, \dots, L\}$:

$$\begin{aligned}\tilde{E}^l &= (\tilde{E}_{s, n_1, n_2}^l \mid n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; s = 1, 2), \\ \tilde{H}^l &= (\tilde{H}_{s, n_1, n_2}^l \mid n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; s = 1, 2).\end{aligned}\tag{5.53}$$

Choix de l'algorithme d'empilement des couches lamellaires Le développement du champ électromagnétique que nous avons réalisé dans la section précédente permet d'obtenir une relation entre les vecteurs \tilde{E}^{l-1} , \tilde{H}^{l-1} , \tilde{E}^l et \tilde{H}^l qui représentent les composantes tangentielles du champ sur les interfaces délimitant la couche lamellaire \mathcal{C}_l . En effet, les vecteurs \tilde{E}^{l-1} et \tilde{H}^{l-1} permettent de définir l'ensemble des coefficients complexes $\{A_{\varepsilon, n_1, n_2}^c, A_{\varepsilon, n_1, n_2}^s, A_{\mu, n_1, n_2}^c, A_{\mu, n_1, n_2}^s \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ qui représentent la totalité du champ électromagnétique dans toute la couche lamellaire \mathcal{C}_l : cet ensemble de coefficients complexes permet en particulier d'exprimer les vecteurs \tilde{E}^l et \tilde{H}^l . La relation la plus naturelle entre les vecteurs \tilde{E}^{l-1} , \tilde{H}^{l-1} , \tilde{E}^l et \tilde{H}^l est donc une relation de type matrice (infinie) de transfert. Soit \tilde{T}^l la matrice de transfert à travers la couche lamellaire \mathcal{C}_l .

$$\forall l \in \{1, \dots, L\} : \begin{bmatrix} \tilde{E}^l \\ \tilde{H}^l \end{bmatrix} = \tilde{T}^l \begin{bmatrix} \tilde{E}^{l-1} \\ \tilde{H}^{l-1} \end{bmatrix}.\tag{5.54}$$

Les composantes tangentielles du champ électromagnétique étant continues, il suffit de réaliser le produit matriciel des matrices de transfert \tilde{T}^l pour obtenir la relation entre les vecteurs \tilde{E}^0 , \tilde{H}^0 , \tilde{E}^L et \tilde{H}^L . Seulement, cet algorithme présente des instabilités numériques. C'est pourquoi nous utilisons un algorithme plus sophistiqué.

Nous estimons que L. Li a achevé l'étude des algorithmes d'empilement des couches réseaux dans [70]. Cette étude recense deux classes d'algorithmes d'empilement des couches réseaux ne présentant pas, en général, d'instabilités numériques.

La première classe d'algorithme est appelée algorithme de type matrice S (de l'anglais *scattering matrix*). Cet algorithme présente l'intérêt d'être relativement simple. Seulement, l'algorithme de type matrice S suppose que le champ électromagnétique peut être développé en ondes entrantes et sortantes sur l'interface plane qui sépare les deux couches réseaux à empiler. Si les deux couches réseaux à empiler sont invariantes dans la direction de l'empilement, cette hypothèse s'avère exacte (le champ électromagnétique possède alors un développement dit "modal" dans les deux couches réseaux [71]). Sinon, l'argument permettant de justifier le développement en ondes sortantes et entrantes consiste à imaginer qu'il existe une couche homogène fictive (ou infiniment fine) entre les deux couches réseaux à empiler. Il s'avère que malgré cette hypothèse, l'algorithme de type matrice S n'a jamais été mis en défaut. Nous avons cependant choisi d'utiliser la seconde classe d'algorithme que nous jugeons plus satisfaisante du point de vue de la justification.

La seconde classe d'algorithme est généralement appelée algorithme de type matrice R [70]. Nous préférons qualifier cette seconde classe d'algorithme de "algorithme de type matrice impédance" (ou admittance) que nous jugeons plus explicite. Le point de départ de l'algorithme de type matrice impédance est (justement) une relation de type matrice impédance entre les vecteurs \tilde{E}^{l-1} , \tilde{H}^{l-1} , \tilde{E}^l et \tilde{H}^l . Soit \tilde{Z}^l la matrice impédance de la couche lamellaire \mathcal{C}_l .

$$\forall l \in \{1, \dots, L\} : \begin{bmatrix} \tilde{E}^l \\ \tilde{E}^{l-1} \end{bmatrix} = \tilde{Z}^l \begin{bmatrix} \tilde{H}^l \\ \tilde{H}^{l-1} \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

La principale difficulté de l'algorithme de type matrice impédance est d'obtenir la matrice \tilde{Z}^l de la couche lamellaire \mathcal{C}_l sans instabilités numériques. La méthode permettant d'obtenir la matrice \tilde{Z}^l est détaillée dans [70].

Algorithme d'empilement des couches lamellaires Soient \tilde{Z}_{11}^l , \tilde{Z}_{12}^l , \tilde{Z}_{21}^l et \tilde{Z}_{22}^l les quatre blocs qui constituent la matrice \tilde{Z}^l pour tout $l \in \{1, \dots, L\}$.

$$\forall l \in \{1, \dots, L\} : \tilde{Z}^l = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11}^l & \tilde{Z}_{12}^l \\ \tilde{Z}_{21}^l & \tilde{Z}_{22}^l \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Alors, d'après (5.55), l'algorithme d'empilement de type matrice impédance que nous utilisons est pour tout $l \in \{1, \dots, L-1\}$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}^{l+1} \\ \tilde{E}^{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11}^{l+1} + \tilde{Z}_{12}^{l+1}(\tilde{Z}_{11}^l - \tilde{Z}_{22}^{l+1})^{-1}\tilde{Z}_{21}^{l+1} & -\tilde{Z}_{12}^{l+1}(\tilde{Z}_{11}^l - \tilde{Z}_{22}^{l+1})^{-1}\tilde{Z}_{12}^l \\ \tilde{Z}_{21}^l(\tilde{Z}_{11}^l - \tilde{Z}_{22}^{l+1})^{-1}\tilde{Z}_{21}^{l+1} & \tilde{Z}_{22}^l - \tilde{Z}_{21}^l(\tilde{Z}_{11}^l - \tilde{Z}_{22}^{l+1})^{-1}\tilde{Z}_{12}^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}^{l+1} \\ \tilde{H}^{l-1} \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

Après cet empilement, la structure “tas de bois” est un empilement de $L - 1$ couches lamellaires. Il suffit donc d’itérer l’empilement (5.57) pour obtenir la matrice impédance de la structure “tas de bois”.

Conclusion Nous utilisons l’algorithme d’empilement des couches lamellaires de type matrice impédance (5.57). Cet algorithme numériquement stable nous permet d’empiler un nombre L de couches lamellaires aussi grand que l’on veut.

Enfin, une fois que nous avons empilé l’ensemble des couches lamellaires, nous obtenons une relation de type impédance entre les vecteurs \tilde{E}^0 , \tilde{H}^0 , \tilde{E}^L et \tilde{H}^L qui représentent les composantes tangentielles du champ électromagnétique aux limites de la structure “tas de bois”. Soit \tilde{Z} la matrice impédance de la structure “tas de bois”.

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}^0 \\ \tilde{E}^L \end{bmatrix} = \tilde{Z} \begin{bmatrix} \tilde{H}^0 \\ \tilde{H}^L \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Cette relation de type impédance nous donne une infinité de solutions associées à la fréquence ω et aux composantes k_1 , k_2 (représentées dans l’équation (5.58) par le symbole \sim) à l’intérieur de la structure “tas de bois”. L’étape suivante consiste donc à imposer des conditions aux limites de structure “tas de bois”.

5.5 Premier type de conditions aux limites du cristal : la condition d’onde sortante

Dans cette section 5.5, nous imposons la condition d’onde sortante aux limites de la structure “tas de bois” : la condition d’onde sortante permet de simuler numériquement l’expérience qui consiste à éclairer la structure par un champ incident puis à mesurer les fractions d’énergies réfléchies et transmises.

Nous commençons par développer le champ électromagnétique à l’extérieur de la structure “tas de bois” en ondes entrantes et en ondes sortantes. Nous pourrions alors définir le champ incident et les efficacités du champ diffracté. Enfin, nous réaliserons un test de convergence pour nous assurer de la stabilité de notre code numérique.

5.5.1 Développement du champ électromagnétique à l’extérieur de la structure “tas de bois”

Dans cette section 5.5.1 nous exprimons le champ électromagnétique à l’extérieur de la structure “tas de bois” sous forme d’un développement de Rayleigh. L’équation (5.19) permet de déduire la fonction \tilde{H} de la fonction \tilde{E} : il suffit donc de développer la fonction \tilde{E} représentant le champ électrique. D’après (5.5), les fonctions ε et μ sont constantes à l’extérieur de la structure “tas de bois”. Alors, l’équation (5.19)

vérifiée par la fonction \tilde{E} devient à l'extérieur de la structure "tas de bois"

$$\begin{aligned} (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \omega^2 \varepsilon^u \mu^u) \tilde{E} &= 0 \quad \forall x_3 \geq 0, \\ (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + \omega^2 \varepsilon^d \mu^d) \tilde{E} &= 0 \quad \forall x_3 \leq -h_3, \end{aligned} \quad (5.59)$$

et

$$\nabla \cdot \tilde{E} = 0. \quad (5.60)$$

Nous développons la dépendance en x_1 et x_2 de la fonction \tilde{E} dans la base de Fourier. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, pour tout $x_3 \leq -h_3$ et pour tout $x_3 \geq 0$:

$$\tilde{E}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{E}_{n_1, n_2}(x_3) \exp(ik_{1, n_1} x_1) \exp(ik_{2, n_2} x_2), \quad (5.61)$$

où l'expression de k_{1, n_1} et k_{2, n_2} est (5.24) et (5.52). Nous projetons l'équation (5.59) vérifiée par la fonction \tilde{E} sur le vecteur $(x_1, x_2) \mapsto \exp(ik_{1, n_1} x_1) \exp(ik_{2, n_2} x_2)$ en utilisant le produit scalaire usuel

$$(G, G') \mapsto (1/h_1)(1/h_2) \int_{V_{12}} \overline{G(x_1, x_2)} G'(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (5.62)$$

où G et G' sont des fonctions localement de carré sommable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{C} . Alors, les composantes de Fourier \tilde{E}_{n_1, n_2} vérifient à l'extérieur de la structure "tas de bois" pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} [\partial_3^2 + (k_{3, n_1, n_2}^u)^2] \tilde{E}_{n_1, n_2} &= 0 \quad \forall x_3 \geq 0, \\ [\partial_3^2 + (k_{3, n_1, n_2}^d)^2] \tilde{E}_{n_1, n_2} &= 0 \quad \forall x_3 \leq -h_3, \end{aligned} \quad (5.63)$$

où

$$\begin{aligned} k_{3, n_1, n_2}^u &= \sqrt{\omega^2 \varepsilon^u \mu^u - k_{1, n_1}^2 - k_{2, n_2}^2} \quad \text{avec} \quad \arg(k_{3, n_1, n_2}^u) \in \{0, \pi/2\}, \\ k_{3, n_1, n_2}^d &= \sqrt{\omega^2 \varepsilon^d \mu^d - k_{1, n_1}^2 - k_{2, n_2}^2} \quad \text{avec} \quad \arg(k_{3, n_1, n_2}^d) \in \{0, \pi/2\}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

La solution générale de l'équation (5.63) est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles montantes ou descendantes (d'argument $\pm k_{3, n_1, n_2}^u x_3$ dans le superstrat et $\pm k_{3, n_1, n_2}^d x_3$ dans le substrat). Nous supposons que les sources qui créent le champ incident sont exclusivement situées dans le superstrat. Alors, pour tout $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n_1, n_2}(x_3) &= \tilde{E}_{n_1, n_2}^i \exp(-ik_{3, n_1, n_2}^u x_3) + \tilde{E}_{n_1, n_2}^r \exp(ik_{3, n_1, n_2}^u x_3) \quad \forall x_3 \geq 0, \\ \tilde{E}_{n_1, n_2}(x_3) &= \tilde{E}_{n_1, n_2}^t \exp(-ik_{3, n_1, n_2}^d x_3) \quad \forall x_3 \leq -h_3, \end{aligned} \quad (5.65)$$

où

$$\tilde{E}_{n_1, n_2}^i, \tilde{E}_{n_1, n_2}^r, \tilde{E}_{n_1, n_2}^t \in \mathbb{C}^3. \quad (5.66)$$

L'ensemble des coefficients complexes \tilde{E}_{n_1, n_2}^i , \tilde{E}_{n_1, n_2}^r et \tilde{E}_{n_1, n_2}^t représentent donc les champs incident, réfléchi et transmis (figure 5.5).

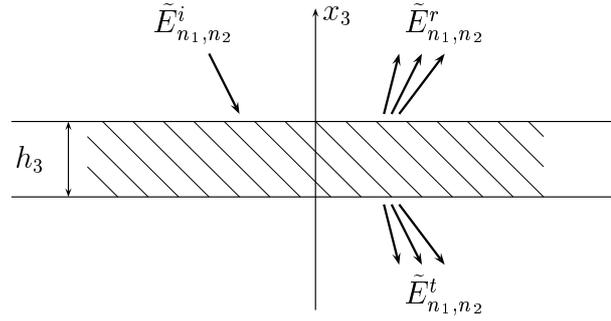


FIG. 5.5: Représentation des champs incident, réfléchi et transmis. Nous avons représenté une unique composante (de Fourier) incidente, trois composantes réfléchies et trois composantes transmises.

Conclusion Si nous remplaçons les fonctions \tilde{E}_{n_1, n_2} par leur expression (5.65) dans le développement (5.61) de la fonction \tilde{E} , nous obtenons le développement du champ électromagnétique en ondes entrantes et sortantes à l'extérieur de la structure "tas de bois". Ce développement permet de décomposer la totalité du champ électromagnétique en une partie incidente et une partie diffractée constituée des champs réfléchis et transmis. La partie incidente du champ électromagnétique, supposée connue, permet d'imposer une condition sur les vecteurs \tilde{E}^0 , \tilde{H}^0 , \tilde{E}^L et \tilde{H}^L qui représentent les composantes tangentielles du champ électromagnétique aux limites de la structure "tas de bois". Cette condition associée à la relation de type impédance (5.58) permet d'obtenir (au moins numériquement) une unique solution (\tilde{E}, \tilde{H}) . Cette unique solution permet de définir de façon unique la partie diffractée du champ électromagnétique.

5.5.2 Définition du champ incident

Nous supposons que la fonction représentant le champ incident est constituée d'une unique composante de Fourier associée à une onde plane propagative dans le superstrat. Soit $\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i$ cette unique composante de Fourier que nous supposons réelle et de norme 1.

$$\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i \in \mathbb{R}^3, \quad |\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i| = 1 \quad \text{et} \quad (n_1, n_2) \neq (n_1^i, n_2^i) \implies \tilde{E}_{n_1, n_2}^i = 0. \quad (5.67)$$

Soit k^i le vecteur qui détermine la direction de propagation de l'onde plane représentant le champ incident.

$$k^i = k_1^i e_1 + k_2^i e_2 + k_3^i e_3, \quad (5.68)$$

où

$$k_1^i = k_{1, n_1^i}, \quad k_2^i = k_{2, n_2^i} \quad \text{et} \quad k_3^i = -k_{3, n_1^i, n_2^i}^u \in \mathbb{R}. \quad (5.69)$$

Nous repérons la direction du vecteur k^i par les deux angles $\theta^i \in [0, \pi/2[$ et $\phi^i \in [0, 2\pi[$ associés au système de coordonnées sphériques usuel (figure 5.6).

$$k_1^i = |k^i| \sin \theta^i \cos \phi^i, \quad k_2^i = |k^i| \sin \theta^i \sin \phi^i, \quad k_3^i = -|k^i| \cos \theta^i, \quad (5.70)$$

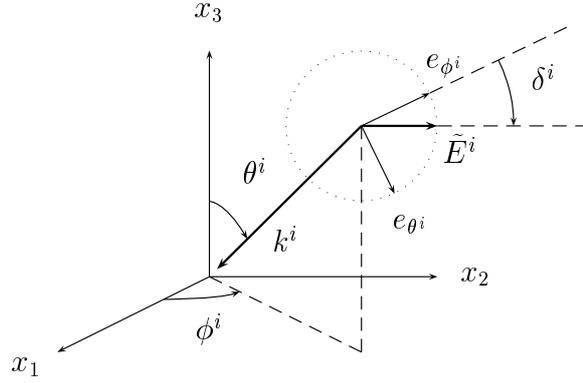


FIG. 5.6: Représentation de l'onde plane incidente : sa polarisation est déterminée par l'angle δ^i et sa direction est déterminée par les deux angles θ^i et ϕ^i .

où $|k^i| = \omega\sqrt{\varepsilon^u\mu^u}$ est la norme du vecteur k^i . Soit \tilde{E}^i la partie incidente de la fonction \tilde{E} . Alors, d'après (5.70,5.65,5.61,5.60), l'expression de la fonction \tilde{E}^i est pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_3 \geq 0$:

$$\tilde{E}^i(x) = \tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i \exp(ik^i \cdot x) \quad \text{avec} \quad k^i \cdot \tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i = 0. \quad (5.71)$$

Soient e_{θ^i} et e_{ϕ^i} les deux vecteurs orthonormés et orthogonaux au vecteur k^i associés au système de coordonnées sphériques usuel (figure 5.6).

$$\begin{aligned} e_{\theta^i} &= \cos \theta^i \cos \phi^i e_1 + \cos \theta^i \sin \phi^i e_2 + \sin \theta^i e_3, \\ e_{\phi^i} &= -\sin \phi^i e_1 + \cos \phi^i e_2. \end{aligned} \quad (5.72)$$

D'après (5.71), le vecteur constant $\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i$ est orthogonal au vecteur k^i . Le vecteur $\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i$ s'exprime donc à partir des deux vecteurs e_{θ^i} et e_{ϕ^i} . Soit $\delta^i \in [0, 2\pi[$ l'angle qui détermine la polarisation du champ incident.

$$\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i = \sin \delta^i e_{\theta^i} + \cos \delta^i e_{\phi^i}. \quad (5.73)$$

Enfin, si nous remplaçons les vecteurs e_{θ^i} et e_{ϕ^i} par leur expression (5.72) dans la définition (5.73), nous obtenons l'expression des trois composantes du vecteur $\tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i \in \mathbb{C}^3$ à partir des trois angles θ^i , ϕ^i et δ^i .

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i \cdot e_1 &= \cos \phi^i \cos \theta^i \sin \delta^i - \sin \phi^i \cos \delta^i, \\ \tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i \cdot e_2 &= \sin \phi^i \cos \theta^i \sin \delta^i + \cos \phi^i \cos \delta^i, \\ \tilde{E}_{n_1^i, n_2^i}^i \cdot e_3 &= \sin \theta^i \sin \delta^i. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Conclusion Nous avons supposé que la partie incidente \tilde{E}^i de la fonction \tilde{E} est constituée d'une unique onde plane (5.71). D'après (5.70,5.74), cette onde plane est entièrement déterminée par la fréquence ω et par les trois angles $\theta^i \in [0, \pi/2[$, $\phi^i \in [0, 2\pi[$ et $\delta^i \in [0, 2\pi[$. Dorénavant, nous définirons toujours l'onde plane incidente par ces quatre paramètres.

5.5.3 Définition des efficacités du champ diffracté

Le champ diffracté par la structure “tas de bois” est constitué d’une infinité de composantes de Fourier (5.65). Parmi cette infinité de composantes, seul un nombre fini est susceptible d’être observé à une distance suffisamment grande de la structure “tas de bois” (supérieure à quelques longueurs d’ondes) : ces composantes de Fourier observables à l’infini sont associées à des ondes planes propagatives (par opposition aux autres composantes de Fourier associées à des ondes planes évanescentes qui tendent rapidement vers 0). Chacune de ces ondes planes propagatives emporte une fraction du flux du vecteur de Poynting apporté par l’onde plane incidente. Ces fractions de flux emportées par le champ diffracté sont généralement appelées efficacités diffractées. Les efficacités diffractées représentent les grandeurs physiques qui sont effectivement mesurées lors d’une expérience qui consiste à éclairer une structure de type réseau puis à déterminer les propriétés du champ diffracté.

Définition des efficacités diffractées Le champ électromagnétique est à ce stade représenté par les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} qui sont localement de carré sommable par rapport aux variables x_1 et x_2 et qui vérifient les conditions de Bloch à la frontière de la maille élémentaire V_{12} (5.20,5.21). Alors, le vecteur de Poynting complexe est localement sommable par rapport aux variables x_1 et x_2 et est Γ_{12} -périodique. Nous considérons donc le flux de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe à travers la maille élémentaire V_{12} . Soit $\tilde{\Pi}$ la partie réelle du vecteur de Poynting complexe.

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_1 e_1 + \tilde{\Pi}_2 e_2 + \tilde{\Pi}_3 e_3 = (\tilde{E} \times \overline{\tilde{H}} + \overline{\tilde{E}} \times \tilde{H})/4. \quad (5.75)$$

Soient $\tilde{\Phi}^u$ et $\tilde{\Phi}^d$ les flux de la partie réelle du vecteur de Poynting à travers la maille élémentaire V_{12} au niveau des interfaces planes horizontales d’équation $x_3 = 0$ et $x_3 = -h_3$ séparant la structure “tas de bois” du superstrat et du substrat. Le vecteur normal à la maille élémentaire V_{12} est le vecteur e_3 . Alors,

$$\tilde{\Phi}^u = \int_{V_{12}} \tilde{\Pi}_3(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}^d = \int_{V_{12}} \tilde{\Pi}_3(x_1, x_2, -h_3) dx_1 dx_2. \quad (5.76)$$

Nous remplaçons la fonction \tilde{E} par son expression (5.61,5.65) et nous exprimons la fonction \tilde{H} à partir de la fonction \tilde{E} avec la relation (5.19). Alors, l’expression (5.76) des flux $\tilde{\Phi}^u$ et $\tilde{\Phi}^d$ devient

$$\tilde{\Phi}^u = -\tilde{\Phi}^i + \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^r \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}^d = - \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^t. \quad (5.77)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^i &= h_1 h_2 \sqrt{\varepsilon^u / \mu^u} \cos \theta^i, \\ \tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^r &= h_1 h_2 \left| \tilde{E}_{n_1, n_2}^r \right|^2 \left| \Re(k_{3, n_1, n_2}^u) \right| / (\omega \mu^u) \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^t &= h_1 h_2 \left| \tilde{E}_{n_1, n_2}^t \right|^2 \left| \Re(k_{3, n_1, n_2}^d) \right| / (\omega \mu^d) \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Parmi l'ensemble des fractions de flux réfléchies $\tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^r$ et transmises $\tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^t$ que nous venons de définir, seul un nombre fini est non-nul. En effet, d'après leur définition (5.64), les nombres k_{3, n_1, n_2}^u et k_{3, n_1, n_2}^d sont purement imaginaires dès que l'un des entiers n_1 ou n_2 est suffisamment grand. Soient \tilde{N}^u et \tilde{N}^d les ensembles de couples d'entiers qui correspondent aux fractions de flux réfléchies $\tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^r$ et transmises $\tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^t$ non-nulles.

$$\begin{aligned}\tilde{N}^u &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid k_{1, n_1}^2 + k_{2, n_2}^2 < \omega^2 \varepsilon^u \mu^u\}, \\ \tilde{N}^d &= \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid k_{1, n_1}^2 + k_{2, n_2}^2 < \omega^2 \varepsilon^d \mu^d\}.\end{aligned}\tag{5.79}$$

Soient \mathcal{E}_{n_1, n_2}^r et \mathcal{E}_{n_1, n_2}^t les fractions de flux réfléchies et transmises (ou efficacités des champs réfléchis et transmis) par la structure “tas de bois”.

$$\begin{aligned}\forall (n_1, n_2) \in \tilde{N}^u : \mathcal{E}_{n_1, n_2}^r &= \tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^r / \tilde{\Phi}^i, \\ \forall (n_1, n_2) \in \tilde{N}^d : \mathcal{E}_{n_1, n_2}^t &= \tilde{\Phi}_{n_1, n_2}^t / \tilde{\Phi}^i.\end{aligned}\tag{5.80}$$

Conservation de flux de la partie réelle du vecteur de Poynting Dans le cas où la structure “tas de bois” est constituée de matériaux sans pertes (les fonctions ε et μ vérifient alors l'hypothèse (5)), les flux $\tilde{\Phi}^u$ et $\tilde{\Phi}^d$ sont égaux : (5) $\implies \tilde{\Phi}^u = \tilde{\Phi}^d$. Alors, d'après (5.77, 5.80), les efficacités diffractées vérifient

$$(5) \implies 1 = \sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{N}^u} \mathcal{E}_{n_1, n_2}^r + \sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{N}^d} \mathcal{E}_{n_1, n_2}^t.\tag{5.81}$$

Cette relation entre les efficacités diffractées constitue un critère de validité du code numérique simple à vérifier généralement appelé “conservation de l'énergie”. Nous utiliserons souvent ce critère de validité.

Preuve de l'égalité $\tilde{\Phi}^u = \tilde{\Phi}^d$ Les fonctions ε et μ vérifient l'hypothèse (5). Alors, d'après la définition (5.75) de la fonction $\tilde{\Pi}$ et d'après l'équation (5.19) vérifiée par les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} , la divergence de la fonction $\tilde{\Pi}$ est la fonction nulle : $\nabla \cdot \tilde{\Pi} = 0$. Nous considérons le parallélépipède rectangle compris entre les six plans d'équation $x_1 = 0$, $x_1 = h_1$, $x_2 = 0$, $x_2 = h_2$, $x_3 = 0$, $x_3 = -h_3$. D'après l'égalité $\nabla \cdot \tilde{\Pi} = 0$, le flux sortant de la fonction $\tilde{\Pi}$ à travers la surface fermée qui délimite le parallélépipède rectangle que venons de définir est nul. Cette surface fermée se compose de six faces rectangulaires. La fonction $\tilde{\Pi}$ étant Γ_{12} -périodique, son flux sortant à travers les quatre faces rectangulaires verticales est nul (les quatre flux sortant à travers les quatre faces rectangulaires verticales se compensent deux à deux). Alors, le flux sortant de la fonction $\tilde{\Pi}$ à travers les deux faces rectangulaires horizontales est également nul : $\tilde{\Phi}^u + (-\tilde{\Phi}^d) = 0 \implies \tilde{\Phi}^u = \tilde{\Phi}^d$.

Conclusion Nous avons défini les efficacités du champ diffracté par la structure “tas de bois”. Ces efficacités représentent le flux à travers la maille élémentaire V_{12} du vecteur de Poynting associé au champ représenté par les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} . Les champs complexes E_ω et H_ω qui représentent le champ électromagnétique réel sont des superpositions de fonctions \tilde{E} et \tilde{H} vérifiant la condition de Bloch (la notion de superposition est dans cette troisième partie définie par la transformation de

Floquet-Bloch inverse (5.16) associée au réseau bidimensionnel). Par un raisonnement analogue à celui que nous avons réalisé dans la section 2.2.1 (où nous avons transformé le vecteur de Poynting en utilisant l’unitarité de la transformation de Floquet-Bloch), nous pouvons montrer que *le flux du vecteur de Poynting associé à la superposition de fonctions de Bloch est la superposition des flux des vecteurs de Poynting associés à chacune de ces fonctions de Bloch*. Supposons maintenant que la superposition de fonctions de Bloch est un paquet suffisamment étroit (ce qui est généralement le cas dans les expériences). Alors, l’amplitude du paquet se comporte comme une “fonction” de Dirac et les flux du champ électromagnétique réel deviennent effectivement égaux aux flux $\tilde{\Phi}^u$ et $\tilde{\Phi}^d$.

Finalement, les efficacités diffractées (5.80) que nous avons définies correspondent effectivement aux fractions de flux qui sont mesurées dans les expériences si le champ incident est un paquet de distribution angulaire suffisamment étroite.

5.5.4 Test de convergence des efficacités diffractées

Nous réalisons un test de convergence dans le cas de la couche lamellaire qui permet d’engendrer le cristal photonique réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* [11, 12]. Nous réalisons un premier test qui consiste à estimer l’évolution du critère de la conservation de l’énergie (5.81).

Nous réalisons un second test qui consiste à comparer la vitesse de convergence des efficacités diffractées (5.80) obtenue avec notre méthode (utilisant les valeurs propres et les fonctions propres exactes) et la méthode modale usuelle (utilisant les valeurs propres et les fonctions propres approchées dans la base de Fourier). Nous considérons une unique couche lamellaire monodimensionnelle afin d’estimer la vitesse de convergence de notre code numérique.

Données numériques de la structure “tas de bois” La structure “tas de bois” est constituée d’une unique couche lamellaire elle-même constituée de deux tiges dont les axes sont dirigés suivant la direction e_2 .

$$L = 1, \quad M_1 = 2 \quad \text{et} \quad s(1) = 1. \quad (5.82)$$

La structure “tas de bois” est donc un réseau monodimensionnel périodique dans la direction e_1 . Nous exprimons alors toutes les longueurs à partir de la période spatiale h_1 . L’épaisseur de la couche lamellaire et la largeur des deux tiges sont

$$h_3 = h_{3,1} = h_1/(2\sqrt{2}), \quad w_{1,1} = 0.28h_1 \quad \text{et} \quad w_{1,2} = 0.72h_1. \quad (5.83)$$

Le superstrat et le substrat possèdent les propriétés du vide et l’ensemble des matériaux qui constituent la couche lamellaire possèdent les mêmes propriétés magnétiques que le vide.

$$\varepsilon^u = \varepsilon_0, \quad \varepsilon^d = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3. \quad (5.84)$$

Enfin, la première tige est constituée de silicium (matériau présentant peu de pertes et d’indice diélectrique d’environ 3.6 dans le domaine du proche infrarouge) et la

deuxième tige possède les propriétés du vide.

$$\varepsilon_{1,1}/\varepsilon_0 = (3.6)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{1,2} = \varepsilon_0. \quad (5.85)$$

Données numériques du champ électromagnétique Les valeurs numériques de la fréquence ω et des trois angles θ^i , ϕ^i et δ^i définissant le champ électromagnétique incident (5.74) sont

$$2\pi/(\omega h_1 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 1.0, \quad \theta^i = \pi/4, \quad \phi^i = 0 \quad \text{et} \quad \delta^i = 0, \pi/2. \quad (5.86)$$

La longueur d'onde est donc égale à la période spatiale h_1 . Les deux valeurs numériques de l'angle δ^i correspondent aux deux cas de polarisation généralement appelés polarisation TE ($\delta^i = 0$) et polarisation TM ($\delta^i = \pi/2$). Enfin, le champ électromagnétique total est représenté par un nombre fini de vecteurs. Soient $(2N_1 + 1)$ et $(2N_2 + 1)$ les nombres de vecteurs utilisés pour représenter les dépendances en x_1 et x_2 du champ électromagnétique.

$$n_1 \in \{0, \pm 1, \dots, \pm N_1\} \quad \text{et} \quad n_2 \in \{0, \pm 1, \dots, \pm N_2\} \quad \text{avec} \quad N_2 = 0. \quad (5.87)$$

Evolution du critère de la conservation de l'énergie Notre code numérique peut tronquer les matrices infinies de différentes manières : certaines manières de tronquer les matrices impliquent que la conservation de l'énergie (5.81) est systématiquement vérifiée (indépendamment du nombre N_1) et d'autres impliquent que la conservation de l'énergie n'est *a priori* pas vérifiée [65, 72]. Nous utilisons ici une manière de tronquer qui n'implique pas la conservation de l'énergie (5.81). Nous avons représenté sur la figure 5.7 l'erreur

$$\epsilon = \left| 1 - \sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{N}^u} \mathcal{E}_{n_1, n_2}^r - \sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{N}^d} \mathcal{E}_{n_1, n_2}^t \right| \quad (5.88)$$

idéalement nulle en fonction du nombre de vecteurs $(2N_1 + 1)$ pour les deux angles $\delta^i = 0$ et $\delta^i = \pi/2$. La représentation en échelle logarithmique sur les deux axes nous permet d'estimer la loi qui décrit l'évolution de l'erreur ϵ . D'après la figure 5.7,

$$\begin{aligned} \delta^i = 0 \quad (\text{polarisation TE}) : \epsilon &\approx O(N_1^{-4.7}). \\ \delta^i = \pi/2 \quad (\text{polarisation TM}) : \epsilon &\approx O(N_1^{-3}). \end{aligned} \quad (5.89)$$

L'erreur ϵ tend donc plus rapidement vers zéro en polarisation TE qu'en polarisation TM. Nous retiendrons surtout qu'en polarisation TM (et donc dans tous les cas pratiques), l'erreur tend vers zéro comme l'inverse du cube du nombre de vecteurs utilisés pour représenter le champ électromagnétique.

Evolution des efficacités diffractées Nous avons représenté sur la figure 5.8 l'efficacité réfléchie $\mathcal{E}_{2,1}^r$ (ou efficacité réfléchie dans l'ordre 0 [26]) dans les deux cas de polarisation TE et TM. Nous avons utilisé deux méthodes différentes : la méthode modale utilisant les valeurs et fonctions propres "exactes" de notre code numérique

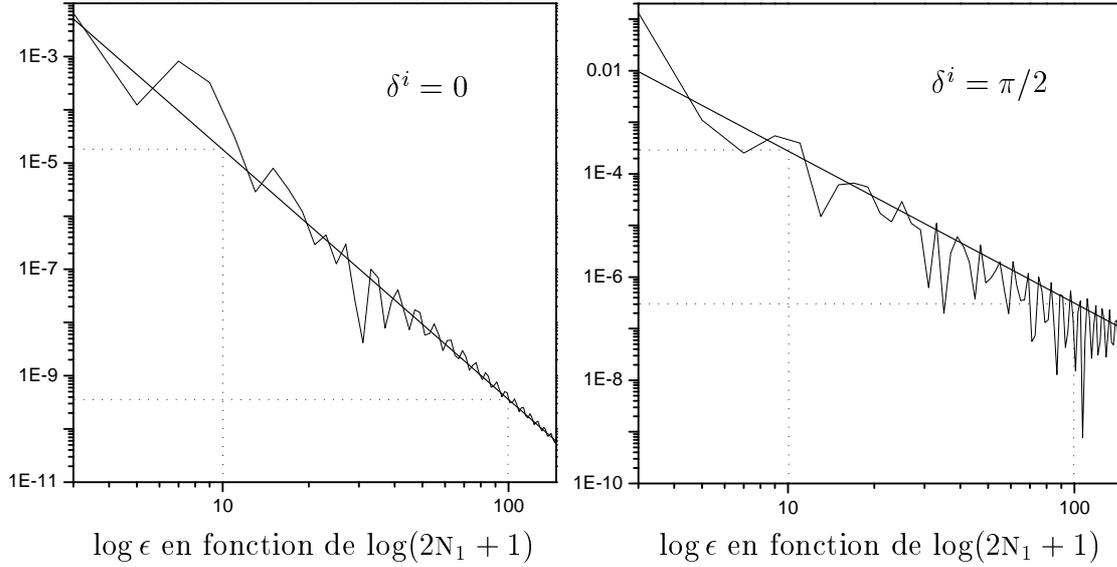


FIG. 5.7: Evolution de l'erreur (5.88) en fonction du nombre de vecteurs $(2N_1 + 1)$ utilisés pour représenter le champ électromagnétique. Nous avons utilisé une échelle logarithmique sur les deux axes. Les pentes des droites approchant les courbes sont -4.7 pour $\delta^i = 0$ (ou polarisation TE) et -3 pour $\delta^i = \pi/2$ (polarisation TM).

et la méthode modale utilisant les valeurs et fonctions propres approchées dans la base de Fourier. Nous utilisons pour cette deuxième méthode le code numérique de S. Enoch développé à partir de la formulation de la méthode modale de L. Li [71]: cette formulation de la méthode modale utilise toutes les techniques sophistiquées qui permettent d'accélérer la convergence des séries de Fourier [73].

La figure 5.8 montre que notre méthode est plus efficace que la méthode usuelle utilisant la base de Fourier. Supposons que nous exigeons une erreur inférieure à 0.01 sur la valeur numérique de l'efficacité $\mathcal{E}_{2,1}^r$. Alors, avec notre méthode des valeurs propres et fonctions propres exactes,

$$\begin{aligned} \delta^i = 0 \quad : N_1 \geq 3 &\implies 0.7323 - 0.01 \leq \mathcal{E}_{2,1}^r \leq 0.7323 + 0.01 . \\ \delta^i = \pi/2 : N_1 \geq 2 &\implies 0.9487 - 0.01 \leq \mathcal{E}_{2,1}^r \leq 0.9487 + 0.01 . \end{aligned} \quad (5.90)$$

Et avec la méthode utilisant la base de Fourier,

$$\begin{aligned} \delta^i = 0 \quad : N_1 \geq 8 &\implies 0.7323 - 0.01 \leq \mathcal{E}_{2,1}^r \leq 0.7323 + 0.01 . \\ \delta^i = \pi/2 : N_1 \geq 13 &\implies 0.9487 - 0.01 \leq \mathcal{E}_{2,1}^r \leq 0.9487 + 0.01 . \end{aligned} \quad (5.91)$$

Cette différence de vitesse de convergence vers la solution exacte n'est pas étonnante si nous admettons que la loi qui décrit l'erreur que commet notre code numérique est (5.89). En effet, la méthode utilisant la base de Fourier représente les fonctions ε et μ par des séries de Fourier qui convergent comme N_1^{-1} (puisque les fonctions ε et

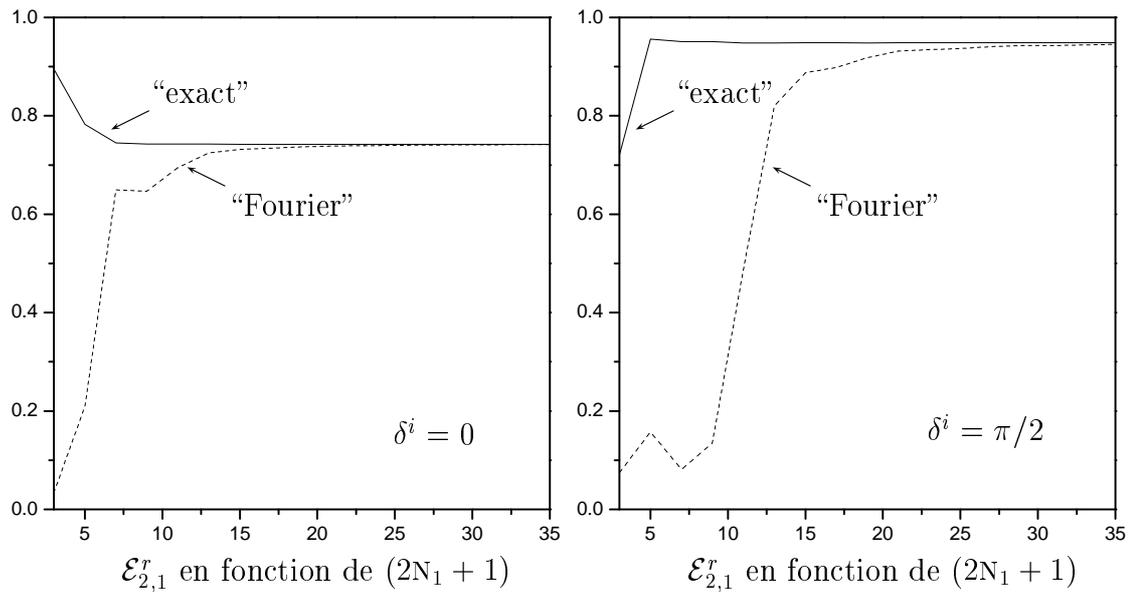


FIG. 5.8: Evolution de l'efficacité réfléchie $\mathcal{E}_{2,1}^r$ (5.80) en fonction du nombre de vecteurs $(2N_1 + 1)$ utilisés pour représenter le champ électromagnétique. La méthode utilisant les valeurs propres et les fonctions propres exactes est représentée avec une ligne continue et la méthode utilisant les valeurs et les fonctions propres approchées dans la base de Fourier est représentée avec une ligne discontinue.

μ sont constantes par morceaux). L'erreur que commet un code numérique utilisant la base de Fourier tend donc vers zéro au mieux comme N_1^{-1} .

La différence de vitesse de convergence vers la solution exacte se traduit par un gain de temps de calcul. Supposons que notre méthode exige un nombre $(2N_1 + 1)$ de vecteurs deux fois plus petit que la méthode usuelle pour une précision donnée (la comparaison des résultats (5.90) et (5.91) nous indique que nous sommes alors prudents). Alors, dans le cas d'une structure tridimensionnelle, notre méthode est susceptible d'exiger un nombre $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$ de vecteurs quatre fois plus petit que la méthode usuelle. Autrement dit, notre code numérique doit déterminer quatre fois moins d'inconnues qu'un code numérique utilisant la méthode usuelle. Dans le cas où le temps de calcul augmente comme le cube du nombre d'inconnues (c'est le cas des produits et des inversions de matrices), notre code numérique devrait permettre de réaliser un gain de temps de calcul non négligeable (d'un facteur de l'ordre de 100).

5.6 Second type de conditions aux limites du cristal : la condition de Bloch

Dans cette section 5.6, nous imposons la condition de Bloch aux limites de la structure "tas de bois". La structure "tas de bois" constitue alors ce que nous appelons

la couche élémentaire du cristal photonique. Soit \mathcal{C} cette couche élémentaire.

$$\mathcal{C} = \{x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid -h_3 \leq x_3 \leq 0\}. \quad (5.92)$$

La condition de Bloch aux limites de la couche élémentaire permet alors d'obtenir la relation de dispersion du cristal photonique dont la maille élémentaire est le volume

$$V = \{x = x'_1 d_1 + x'_2 d_2 + x'_3 d_3 \in \mathbb{R}^3 \mid x'_1, x'_2, x'_3 \in [0, 1]\}, \quad (5.93)$$

où

$$d_3 = d_{3,1} e_1 + d_{3,2} e_2 + d_{3,3} e_3 \quad \text{avec} \quad d_{3,1}, d_{3,2} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_{3,3} = h_3. \quad (5.94)$$

Nous commençons par définir la condition de Bloch aux limites de la structure “tas de bois”. Nous présentons ensuite l'algorithme qui nous permet d'obtenir les valeurs propres et les fonctions propres de la matrice à travers la couche réseau sans instabilités numériques. Enfin, nous réalisons un test de convergence pour nous assurer de la stabilité de notre algorithme.

5.6.1 Définition de la condition de Bloch

D'après (5.21), les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} vérifient déjà les conditions de Bloch à la frontière de la maille élémentaire V_{12} . Imposer la condition de Bloch aux limites de la structure “tas de bois” consiste donc à imposer pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour $n_3 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x + n_3 d_3) &= \exp(2i\pi n_3 k_3) \tilde{E}(x), \\ \tilde{H}(x + n_3 d_3) &= \exp(2i\pi n_3 k_3) \tilde{H}(x), \end{aligned} \quad (5.95)$$

où

$$k_3 \in [-1/2, 1/2] \quad (5.96)$$

est la troisième composante du vecteur $k = (k_1, k_2, k_3)$. Notre code numérique donne la relation de type impédance (5.58) entre les vecteurs \tilde{E}^0 , \tilde{H}^0 , \tilde{E}^L et \tilde{H}^L qui représentent les composantes tangentielles du champ électromagnétique sur les interfaces planes horizontales d'équation $x_3 = 0$ et $x_3 = -h_3$. Alors, la condition de Bloch (5.95) implique

$$\tilde{E}^0 = \exp(2i\pi k_3) \tilde{E}^L \quad \text{et} \quad \tilde{H}^0 = \exp(2i\pi k_3) \tilde{H}^L. \quad (5.97)$$

Cette expression de la condition de Bloch suppose que les deux composantes $d_{3,1}$ et $d_{3,2}$ de la translation élémentaire d_3 sont nulles.

L'expression (5.97) de la condition de Bloch reste vraie dans le cas général si nous modifions la définition (5.51,5.53) des vecteurs \tilde{E}^0 et \tilde{H}^0 ; nous développons les composantes tangentielles du champ sur l'interface plane horizontale d'équation $x_3 = 0$ dans la base de Fourier “décalée”. Pour tout $s = 1, 2$ et pour tout $(x_1, x_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_s^0(x_1, x_2) &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{E}_{s, n_1, n_2}^0 \exp[ik_{1, n_1}(x_1 - d_{3,1})] \exp[ik_{2, n_2}(x_2 - d_{3,2})], \\ \tilde{H}_s^0(x_1, x_2) &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_{s, n_1, n_2}^0 \exp[ik_{1, n_1}(x_1 - d_{3,1})] \exp[ik_{2, n_2}(x_2 - d_{3,2})]. \end{aligned} \quad (5.98)$$

La matrice impédance \tilde{Z} se trouve alors également modifiée. La nouvelle expression de la matrice impédance “décalée” se déduit simplement de l’ancienne “non-décalée”. Il suffit d’exprimer les nouveaux vecteurs \tilde{E}^0 et \tilde{H}^0 “décalés” à partir des anciens vecteurs \tilde{E}^0 et \tilde{H}^0 “non-décalés” puis d’utiliser la relation (5.58).

Soit \tilde{T} la matrice de transfert à travers la structure “tas de bois”. D’après (5.17), le symbole \sim signifie que la matrice \tilde{T} dépend de la fréquence ω et des deux composantes (k_1, k_2) jusqu’à présent fixées comme paramètres : $\tilde{T} = \tilde{T}(\omega, k_1, k_2)$. D’après (5.58)

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}^0 \\ \tilde{H}^0 \end{bmatrix} = \tilde{T} \begin{bmatrix} \tilde{E}^L \\ \tilde{H}^L \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11} \tilde{Z}_{21}^{-1} & \tilde{Z}_{12}^l - \tilde{Z}_{11} \tilde{Z}_{21}^{-1} \tilde{Z}_{22} \\ \tilde{Z}_{21}^{-1} & -\tilde{Z}_{21}^{-1} \tilde{Z}_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

Supposons qu’il existe des vecteurs \tilde{E}^0 , \tilde{H}^0 , \tilde{E}^L et \tilde{H}^L non-nuls qui vérifient les deux relations (5.99) et (5.97) : la relation (5.99) signifie que ces vecteurs vérifient les équations de Maxwell dans la structure “tas de bois” et la relation (5.97) signifie que ces vecteurs sont des fonctions de Bloch. Autrement dit, si le nombre $\exp(2i\pi k_3)$ est une valeur propre de la matrice \tilde{T} , alors la fréquence ω est dans le spectre de l’opérateur $\mathbb{M}(k_1, k_2, k_3)$ (nous avons défini l’opérateur $\mathbb{M}(k_1, k_2, k_3)$ dans la section 2.2.3). La relation de dispersion du cristal photonique est donc

$$\det[\tilde{T}(\omega, k_1, k_2) - I \exp(2i\pi k_3)] = 0, \quad (5.100)$$

où I est la matrice identité opérant dans le même espace que la matrice \tilde{T} . Seulement, cette relation de dispersion n’est pas complètement satisfaisante. En effet, les valeurs propres de la matrice \tilde{T} tendent de façon exponentielle vers l’infini : la relation de dispersion (5.100) n’est donc numériquement exploitable que si la matrice \tilde{T} possède un petit nombre de valeurs propres. Autrement dit, la relation (5.100) numériquement instable ne permet pas d’obtenir avec précision la relation de dispersion du cristal photonique.

Dans la section suivante nous donnons la solution que nous avons élaborée pour déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice \tilde{T} sans instabilités numériques.

5.6.2 Algorithme de type matrice R pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert à travers une couche réseau

Analyse des instabilités numériques La matrice impédance \tilde{Z} ne présente pas d’instabilités numériques. Alors, d’après l’expression (5.99) de la matrice \tilde{T} , l’origine des instabilités numériques est l’inversion du bloc \tilde{Z}_{21} . De même, l’inversion du bloc \tilde{Z}_{12} est l’origine des instabilités numériques de la matrice \tilde{T}^{-1} . Notre algorithme doit donc éviter toute inversion des blocs \tilde{Z}_{21} et \tilde{Z}_{12} .

D’après l’algorithme d’empilement (5.57) numériquement stable, l’inversion des blocs \tilde{Z}_{11} et \tilde{Z}_{22} ne présente pas d’instabilités numériques. Notre algorithme peut donc utiliser l’inversion des blocs \tilde{Z}_{11} et \tilde{Z}_{22} .

Autre expression de la relation de dispersion La relation de dispersion (5.100) signifie que le nombre complexe $\exp(2i\pi k_3)$ est une valeur propre de la matrice \tilde{T} . Alors,

$$\begin{aligned} (5.100) &\iff \exists \tilde{F} \neq 0 : \tilde{T}\tilde{F} = \exp(2i\pi k_3)\tilde{F} \\ &\iff \exists \tilde{F} \neq 0 : (\tilde{T} \pm I)\tilde{F} = [\exp(2i\pi k_3) \pm 1]\tilde{F} \\ &\iff \exists \tilde{F} \neq 0 : (\tilde{T} \pm I)^{-1}\tilde{F} = [\exp(2i\pi k_3) \pm 1]^{-1}\tilde{F}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Nous avons introduit le choix \pm dans cette dernière expression afin que le nombre $\exp(2i\pi k_3) \pm 1$ ne soit jamais nul. Nous obtenons alors une autre expression de la relation de dispersion équivalente à la relation (5.100).

$$(5.100) \iff \det \{ [\tilde{T}(\omega, k_1, k_2) \pm I]^{-1} - I[\exp(2i\pi k_3) \pm 1]^{-1} \} = 0. \quad (5.102)$$

L'avantage de cette relation de dispersion est que la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$ ne présente pas d'instabilités numériques. En effet, nous pouvons exprimer la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$ en évitant toute inversion des blocs \tilde{Z}_{21} et \tilde{Z}_{12} .

$$(\tilde{T} \pm I)^{-1} = \begin{bmatrix} (\tilde{Z}_{22} \mp \tilde{Z}_{21})\tilde{X} & (\tilde{Z}_{22} \mp \tilde{Z}_{21})\tilde{X}\tilde{Y}(\tilde{Z}_{22} \mp \tilde{Z}_{21})^{-1}\tilde{Z}_{22} \\ \tilde{X} & -\tilde{X}(\tilde{Z}_{11} \pm \tilde{Z}_{21}) \end{bmatrix}. \quad (5.103)$$

où

$$\tilde{X} = [(\tilde{Z}_{12} - \tilde{Z}_{21}) \pm (\tilde{Z}_{22} - \tilde{Z}_{11})]^{-1} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = (\tilde{Z}_{12}\tilde{Z}_{22}^{-1}\tilde{Z}_{21} - \tilde{Z}_{11}). \quad (5.104)$$

Conclusion L'expression (5.102) de la relation de dispersion ne présente pas d'instabilités numériques : elle est donc exploitable numériquement. D'après (5.101), les vecteurs propres de la matrice \tilde{T} coïncident avec ceux de la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$.

$$\tilde{F} \text{ est vecteur propre de } \tilde{T} \iff \tilde{F} \text{ est vecteur propre de } (\tilde{T} \pm I)^{-1}. \quad (5.105)$$

Enfin, d'après (5.101), les valeurs propres de la matrice \tilde{T} s'expriment à partir de celles de la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$.

$$\lambda \text{ est valeur propre de } \tilde{T} \iff (\lambda \pm 1)^{-1} \text{ est valeur propre de } (\tilde{T} \pm I)^{-1}. \quad (5.106)$$

5.6.3 Algorithme de type matrice S pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert à travers une couche réseau

L'algorithme de type matrice S permet d'exprimer le champ sortant de la couche réseau à partir du champ entrant [70]. Soient \tilde{E}^{0-} , \tilde{E}^{L+} , \tilde{E}^{0+} et \tilde{E}^{L-} les vecteurs représentant les champs entrant et sortant de la couche réseau (figure 5.9). Soient \tilde{S} la matrice de diffraction de la couche réseau et \tilde{T}_s la matrice de transfert associée à la matrice \tilde{S} (cette matrice de transfert \tilde{T}_s est reliée à la matrice de transfert \tilde{T} de la section précédente par un changement de base). Alors,

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}^{0+} \\ \tilde{E}^{L-} \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} \tilde{E}^{0-} \\ \tilde{E}^{L+} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \tilde{E}^{0-} \\ \tilde{E}^{0+} \end{bmatrix} = \tilde{T}_s \begin{bmatrix} \tilde{E}^{L-} \\ \tilde{E}^{L+} \end{bmatrix}. \quad (5.107)$$

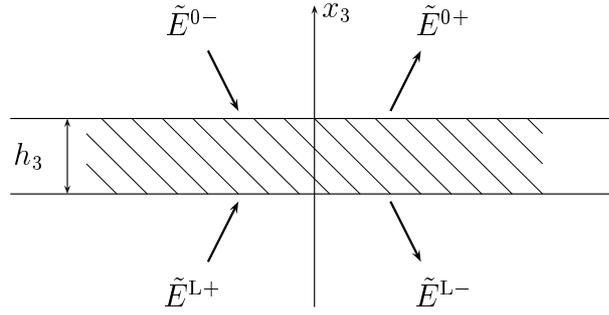


FIG. 5.9: Représentation des vecteurs \tilde{E}^{0-} , \tilde{E}^{L+} , \tilde{E}^{0+} et \tilde{E}^{L-} représentant les champs entrant et sortant de la couche réseau.

Expression de la relation de dispersion Nous donnons directement une expression de la relation de dispersion du cristal qui ne présente pas d’instabilités numériques.

$$(5.100) \iff \det \{ [\tilde{T}_s^{-1}(\omega, k_1, k_2) \pm I]^{-1} - I[\exp(-2i\pi k_3) \pm 1]^{-1} \} = 0. \quad (5.108)$$

Nous avons choisi d’exprimer la relation de dispersion avec la matrice \tilde{T}_s^{-1} afin d’obtenir la relation la plus simple possible.

$$(\tilde{T}_s^{-1} \pm I)^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}^{-1}(I_{11} \pm \tilde{S}_{12})\tilde{X} & -\tilde{S}_{11}^{-1}(I_{11} \pm \tilde{S}_{12})\tilde{X}\tilde{S}_{22}(I_{11} \pm \tilde{S}_{12})^{-1} \\ \tilde{X} & \tilde{X}(\tilde{S}_{21}\tilde{S}_{11}^{-1}\tilde{S}_{12} - \tilde{S}_{22} \pm \tilde{S}_{11}^{-1}\tilde{S}_{12}) \end{bmatrix}, \quad (5.109)$$

où I_{11} est la matrice identité agissant dans le même espace que la matrice \tilde{S}_{12} et

$$\tilde{X} = (\tilde{S}_{21}\tilde{S}_{11}^{-1} \pm \tilde{S}_{11}^{-1} \pm \tilde{S}_{21}\tilde{S}_{11}^{-1}\tilde{S}_{12} \mp \tilde{S}_{22} + \tilde{S}_{11}^{-1}\tilde{S}_{12})^{-1}. \quad (5.110)$$

5.6.4 Test de convergence de la relation de dispersion

Dans cette section nous réalisons un test de convergence de la relation de dispersion pour montrer la stabilité numérique de notre algorithme (5.102). Nous considérons une structure qui ne possède pas de plan de symétrie par rapport à un plan horizontal. En effet, il existe déjà dans ce cas particulier une méthode qui permet d’obtenir la relation de dispersion du cristal photonique sans instabilités numériques [66].

Données numériques de la structure “tas de bois” Nous considérons une structure “tas de bois” identique à celle que nous avons définie dans la section 5.5.4. Nous ajoutons la valeur numérique des deux composantes de la translation élémentaire d_3 que nous n’avons pas encore précisée.

$$d_{3,1} = 0.28h_1 \quad \text{et} \quad d_{3,2} = 0. \quad (5.111)$$

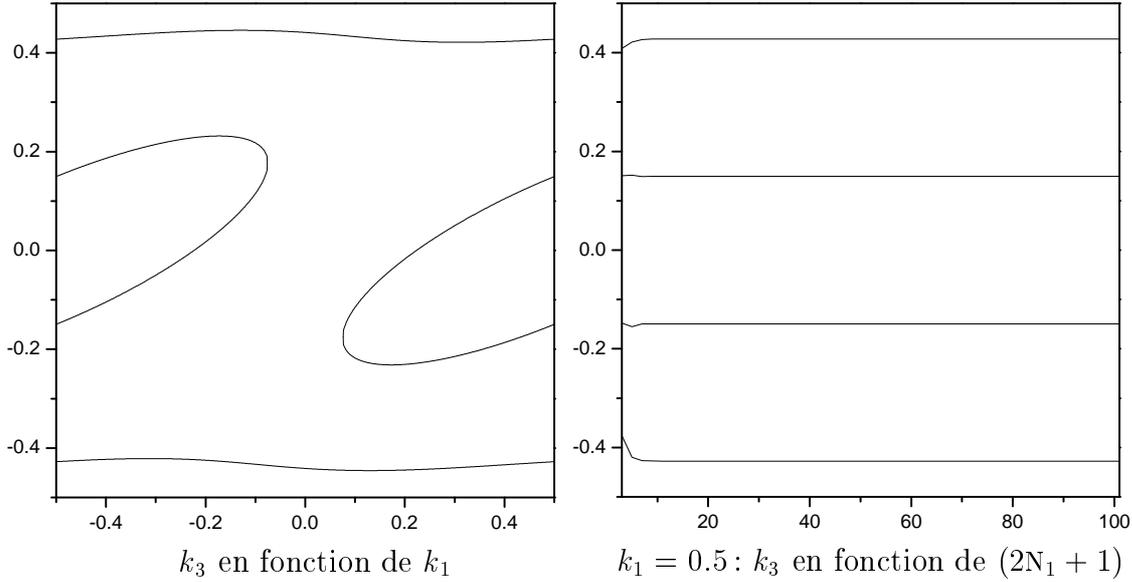


FIG. 5.10: Test de convergence de l'algorithme (5.102). Nous avons représenté la relation de dispersion à fréquence ω constante à gauche. Nous avons réalisé un test de convergence de la composante k_3 en $k_1 = 0.5$ à droite.

Données numériques du champ électromagnétique Les valeurs numériques de la fréquence ω et des angles ϕ^i et δ^i définissant le champ électromagnétique incident (5.74) sont

$$2\pi/(\omega h_1 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 1.9, \quad \phi^i = 0 \quad \text{et} \quad \delta^i = 0. \quad (5.112)$$

Le champ incident n'intervient pas dans la relation de dispersion. Cependant, le choix (5.112) des angles ϕ^i et δ^i signifie que nous restreignons le problème général au cas scalaire ($\phi^i = 0$) de polarisation TE ($\delta^i = 0$).

Test de convergence de la relation de dispersion Nous avons représenté sur la figure 5.10 à gauche la relation de dispersion du cristal photonique que nous venons de définir pour la fréquence (5.112). Nous avons représenté sur la figure 5.10 à droite l'évolution de de la composante k_3 du vecteur k (la composante k_1 étant fixée : $k_1 = 0.5$) quand le nombre de vecteurs $(2N_1 + 1)$ utilisés pour représenter le champ électromagnétique augmente. La figure 5.10 montre clairement la convergence puis la stabilité de l'algorithme (5.102) que nous utilisons. Cette stabilité est impossible à obtenir en utilisant la relation de dispersion (5.100) sans précaution.

5.7 Conclusion : situation de nos méthodes numériques

En conclusion de ce chapitre 5, nous situons les méthodes numériques que nous avons développées parmi les méthodes généralement utilisées. Nous situons dans un

premier temps la démarche générale de notre code numérique pour déterminer la relation de dispersion dans un cristal photonique que nous avons appelée la méthode réseau. Nous situons ensuite la méthode des fonctions propres exactes que nous avons utilisée pour résoudre les équations de Maxwell à l'intérieur de la structure "tas de bois".

5.7.1 Situation de notre démarche générale pour déterminer la relation de dispersion : la méthode réseau

A notre connaissance, trois méthodes numériques sont actuellement utilisées pour déterminer la relation de dispersion des cristaux photoniques : la méthode des ondes planes, la méthode KKR (ou méthode de Rayleigh) et la méthode réseau que nous utilisons.

La méthode des ondes planes La méthode des ondes planes est la méthode la plus utilisée. Cette méthode a pour avantages d'être relativement simple et de pouvoir résoudre les équations de Maxwell dans tout type de cristal photonique.

La méthode des ondes planes consiste à développer le champ électromagnétique dans la base de Fourier dans les trois directions de l'espace [24, 14]. Cette méthode converge lentement vers la solution exacte, en particulier dans le cas où les fonctions ε et μ présentent des discontinuités en raison des phénomènes de Gibbs [25]. Ainsi, cette convergence relativement lente associée au développement dans les trois directions de l'espace du champ électromagnétique font que la méthode des ondes planes nécessite d'importants moyens et temps de calculs. P. Lalanne a sensiblement amélioré la méthode des ondes planes dans des cas particuliers [74] en utilisant les récents résultats sur les produits de séries de Fourier des fonctions discontinues [73]. Néanmoins, même améliorée, la méthode des ondes planes nécessite encore des moyens et temps de calculs relativement importants (en comparaison avec les autres méthodes).

Enfin, la méthode des ondes planes ne permet pas de résoudre le cas où le cristal photonique est constitué de matériaux dispersifs (quand les fonctions ε et μ dépendent la fréquence ω).

La méthode KKR ou méthode de Rayleigh La méthode KKR développée par A. Moroz [37] donne une réponse à l'ensemble des défauts que présente la méthode des ondes planes.

La méthode KKR consiste à développer le champ électromagnétique dans la base des harmoniques sphériques et la dépendance radiale est déterminée en résolvant les équations de Maxwell : le nombre d'inconnues est donc considérablement moins important que dans le cas de la méthode des ondes planes. La méthode KKR permet donc d'obtenir avec des moyens et des temps de calculs raisonnables des résultats d'une bonne précision [10].

La méthode KKR résout les équations de Maxwell harmoniques : elle permet de résoudre les équations de Maxwell en présence de matériaux dispersifs. Ainsi, la

méthode KKR a permis de déterminer la relation de dispersion de cristaux photoniques bidimensionnels constitués de tiges circulaires [75] et de cristaux photoniques tridimensionnels constitués de sphères [39] dans le cas où la fonction ε modélise un métal de Drude.

Enfin, la méthode KKR permet d'obtenir directement la densité locale d'état et, après intégration, la densité d'état par unité de fréquence [37, 10].

Seulement, la méthode KKR, particulièrement bien adaptée aux réseaux de sphères, ne peut pas traiter toutes les géométries : en particulier, la méthode KKR ne peut résoudre les équations de Maxwell en présence d'un cristal photonique "tas de bois".

La méthode réseau La méthode réseau consiste à résoudre les équations de Maxwell dans une couche réseau puis à imposer les conditions de Bloch sur les interfaces planes délimitant la couche réseau. Cette méthode, déjà largement utilisée (dans [66, 23] pour les cristaux photoniques bidimensionnels et dans [42, 67] pour les cristaux photoniques tridimensionnels), présente de nombreux avantages.

- 1 La méthode réseau est universelle : elle englobe l'ensemble des cas traités par la méthode des ondes planes et par la méthode KKR réunies. De même que la méthode des ondes planes, la méthode réseau permet de résoudre tout type de géométrie. De même que la méthode KKR, la méthode réseau permet de résoudre les équations de Maxwell harmoniques : cette méthode peut donc être utilisée dans l'étude des cristaux photoniques dispersifs.
- 2 La méthode réseau consiste à développer le champ électromagnétique dans une base de fonctions périodiques dans deux directions de l'espace ; la dépendance du champ électromagnétique dans la troisième direction est déterminée en résolvant les équations de Maxwell. Alors, de même que la méthode KKR, la méthode réseau permet d'exprimer le champ électromagnétique avec un minimum de coefficients complexes : les moyens et les temps de calculs associés à une bonne précision sont donc raisonnables.
- 3 La méthode réseau permet d'utiliser toutes les techniques sophistiquées et performantes mises au point dans l'étude numérique des réseaux. Les problèmes fondamentaux ont été résolus rigoureusement par L. Li dans l'étude numérique des réseaux : l'empilement des couches réseaux [70] et la convergence des séries de Fourier [73]. Ces problèmes fondamentaux étant résolus, trois méthodes permettent de résoudre les équations de Maxwell à l'intérieur de la couche réseau. Les résultats les plus avancés concernant la méthode modale ont été établis par L. Li : la justification rigoureuse de la méthode modale utilisant les fonctions propres exactes dans le cas vectoriel des réseaux lamellaires monodimensionnels est présentée dans [65], la méthode modale dans les cas les plus généraux est présentée dans [71] et est justifiée rigoureusement dans [76]. Enfin, les méthodes intégrales et différentielles permettent de résoudre les équations de Maxwell harmoniques dans une couche réseau arbitraire. En ce

qui concerne la méthode intégrale, la formulation et les résultats les plus aboutis ont été établis par D. Maystre dans [77]. En ce qui concerne la méthode différentielle, la formulation et les résultats les plus aboutis ont été établis par E. Popov et M. Nevière dans [78, 79].

- 4 La méthode réseau permet de résoudre les équations de Maxwell non seulement dans un cristal photonique parfait mais aussi dans un cristal photonique modélisé par un empilement de réseaux d'épaisseur finie. Contrairement aux autres méthodes, la méthode réseau permet donc de simuler des expériences qui consistent à éclairer un cristal photonique par un champ électromagnétique incident (comme nous l'avons décrit dans la section 5.5), à placer une source à l'intérieur d'un cristal photonique d'épaisseur finie (comme nous le décrirons dans le chapitre 7), *etc.* . . . Enfin, en ce qui concerne les cristaux photoniques parfaits, la méthode réseau est particulièrement bien adaptée au calcul de la densité d'état par unité de fréquence intégrée sur la maille élémentaire du réseau réciproque. En effet, dans le cas de la méthode réseau, l'intégration sur la maille élémentaire du réseau réciproque associé au cristal photonique se réduit à l'intégration sur la maille élémentaire du réseau réciproque associée au réseau bidimensionnel : l'intégration sur un volume se réduit alors à une intégration sur une surface.

Seulement, à notre connaissance, la méthode réseau souffrait jusqu'à présent des instabilités numériques lors du calcul des valeurs propres et des fonctions propres de la matrice de transfert \tilde{T} à travers la couche réseau constituant la couche élémentaire du cristal. C'est pourquoi nous avons élaboré dans la section 5.5 un algorithme qui permet d'obtenir les valeurs propres et les fonctions propres de la matrice de transfert \tilde{T} à travers la couche réseau sans instabilités numériques. Cet algorithme consiste à déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$ directement reliées à celles de la matrice \tilde{T} (la matrice I est la matrice identité opérant dans le même espace que la matrice \tilde{T}). Nous avons donné l'expression de la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$ pour les deux types d'algorithmes d'empilement de couches réseaux généralement utilisés [70] : l'expression de la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$ à partir de la matrice de diffraction de la couche réseau (ou matrice S) est (5.109) et l'expression de la matrice $(\tilde{T} \pm I)^{-1}$ à partir de la matrice impédance de la couche réseau (ou matrice R) est (5.103).

Nous avons donc trouvé une solution au principal défaut de la méthode que nous avons qualifiée de méthode réseau. Ainsi, combinée avec les techniques performantes mises au point dans l'étude numérique des réseaux, nous pensons que la méthode réseau présentera de nombreux avantages. En particulier, nous nous sommes inspirés de la méthode des valeurs propres et des fonctions propres exactes mise au point dans l'étude numérique des réseaux lamellaires monodimensionnels pour développer un code numérique spécialement adapté aux cristaux photoniques "tas de bois", une structure à bandes photoniques interdites parmi les plus prometteuses.

5.7.2 Situation de notre méthode pour résoudre les équations de Maxwell en présence d'un cristal photonique "tas de bois"

Nous avons largement profité des techniques mises au point dans l'étude numérique des réseaux (en particulier les connaissances acquises par le Laboratoire d'Optique Electromagnétique) pour étudier les cristaux photoniques "tas de bois". Nous nous sommes inspirés de la méthode modale utilisant les valeurs propres et les fonctions propres exactes pour résoudre numériquement les équations de Maxwell à l'intérieur de la structure "tas de bois".

La méthode modale utilisant les valeurs propres et fonctions propres exactes a été introduite pour étudier numériquement les réseaux lamellaires monodimensionnels [61, 62, 63]. Cette méthode évite l'utilisation de la base de Fourier pour décrire les fonctions ε et μ alors constantes par morceaux (et donc discontinues). Ainsi, la structure est toujours décrite de façon idéale. De plus, le champ électromagnétique est représenté dans chaque couche lamellaire par des fonctions qui sont spécialement adaptées à la géométrie de la couche lamellaire. Ces deux avantages font que la méthode modale utilisant les valeurs propres et fonctions propres exactes est bien plus performante que les méthodes usuelles qui utilisent la base de Fourier. La comparaison que nous avons réalisée dans la section 5.5.4 avec la méthode modale utilisant les valeurs propres et les fonctions propres approchées dans la base de Fourier [71] va dans ce sens.

Nous avons adapté la méthode modale utilisant les valeurs propres et fonctions propres exactes aux structure "tas de bois" en utilisant le résultat de L. Li établi dans [65]. Nous pensons que les avantages de cette méthode constatés dans le cas des réseaux monodimensionnels seront encore plus significatifs dans le cas des structures "tas de bois" bidimensionnelles. La comparaison que nous avons réalisée dans la section 5.5.4 nous indique que notre code numérique devrait exiger un temps de calcul au moins 100 fois inférieur qu'un code numérique utilisant une méthode usuelle. Nous précisons dans le chapitre 7 le temps de calcul qu'exige notre code numérique : ce temps de calcul est typiquement de l'ordre de la seconde sur une station de travail.

Chapitre 6

Etude numérique de la diffraction par un cristal photonique

Dans ce chapitre 6, nous étudions les propriétés de diffraction des cristaux photoniques avec une approche numérique. Ce chapitre 6 regroupe deux études différentes. Une première étude vise à illustrer numériquement les résultats théoriques de la première partie sur la trajectoire du champ électromagnétique à l'intérieur d'un cristal photonique. La deuxième étude vise à compléter l'étude théorique de la diffraction par un cristal photonique monodimensionnel que nous avons réalisée dans la deuxième partie.

Nous étudions la trajectoire du champ électromagnétique à l'intérieur d'un cristal photonique dans la section 6.1. D'après notre étude théorique de la section 2.2, la trajectoire du champ électromagnétique est déterminée par la vitesse de groupe, elle-même déterminée par la relation de dispersion du cristal photonique. La relation de dispersion d'un cristal photonique est beaucoup plus riche que la relation de dispersion d'un milieu homogène usuel. C'est pourquoi nous pouvons observer dans les cristaux photoniques des phénomènes inhabituels ; nous entendons par "phénomènes inhabituels" des phénomènes qui ne peuvent être observés dans un milieu homogène usuel et qui sont contraires à l'intuition.

Nous présentons plusieurs exemples numériques qui mettent en évidence des phénomènes de réfraction inhabituels. Nous présentons un exemple d'ultra-réfraction ; nous entendons par "ultra-réfraction" le phénomène de réfraction qui serait observé s'il existait des milieux homogènes d'indice optique inférieur à celui du vide, voir proche de zéro. Nous présentons un exemple de réfraction négative ; nous entendons par "réfraction négative" le phénomène de réfraction qui serait observé s'il existait des milieux homogènes d'indice optique négatif. Enfin, nous présentons un exemple de lentille à bords épais convergente illustrant ici encore le phénomène d'ultra-réfraction.

Nous complétons notre étude de l'influence des interfaces séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur dans la section 6.2. Nous montrons que nous pouvons appliquer dans le cas d'un cristal photonique monodimensionnel

une règle analogue à la deuxième loi de Descartes : si $\omega(k)$ est la relation de dispersion, alors les composantes tangentielles du vecteur k sont conservées au passage de l'interface qui sépare le cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur.

Enfin, nous confirmerons la validité de notre estimation de l'influence des interfaces séparant le cristal du milieu extérieur au moyen d'exemples numériques dans les sections 6.3 et 6.4.

6.1 Phénomènes de réfraction inhabituels

Dans cette section 6.1, nous considérons deux structures différentes. Nous considérons le cristal photonique monodimensionnel que nous avons défini dans la deuxième partie et un cristal photonique bidimensionnel que nous définirons dans la section 6.1.2. Nous considérons un cristal photonique bidimensionnel pour mettre en évidence la réfraction négative qui ne peut avoir lieu dans le cas d'un cristal photonique monodimensionnel. Enfin, l'ensemble des phénomènes que nous présentons dans cette section 6.1 a fait l'objet d'une publication [23] comprenant des exemples différents (où le cristal photonique considéré est un ensemble de tiges circulaires homogènes).

6.1.1 Mise en évidence numérique de l'ultra-réfraction dans un cristal photonique monodimensionnel

Nous utilisons dans cette section 6.1.1 les notations adaptées aux cristaux photoniques monodimensionnels que nous avons introduites dans la deuxième partie.

Données numériques du cristal photonique monodimensionnel De même que dans la section 4.5.4, le cristal photonique monodimensionnel est constitué de $n = 1000$ couches élémentaires (4.69). La couche élémentaire est le cas particulier que nous avons défini dans la section 3.1. Les fonctions ε et μ ont pour valeurs numériques (4.12,4.13) et les deux strates constituant la couche élémentaire ont même épaisseur optique (4.14).

Données numériques du champ électromagnétique La valeur numérique de la fréquence et la polarisation (3.11) du champ électromagnétique sont

$$2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 1.697 \quad \text{et} \quad H_{\omega,2} = 0 \quad (\text{polarisation TE}). \quad (6.1)$$

De même que dans la section 4.5.4, l'amplitude A qui définit (3.60) la fonction U^i représentant le champ incident est la gaussienne (4.72,4.73) centrée en $\alpha_1 = \alpha_0$, de largeur spatiale L et de support K_A . La valeur numérique de la variable α_0 est

$$\alpha_0 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sin \theta_0 = 0.1736. \quad (6.2)$$

Cette valeur numérique de la variable α_0 implique que l'angle d'incidence moyen du champ incident est $\theta_0 = 10$ degrés.

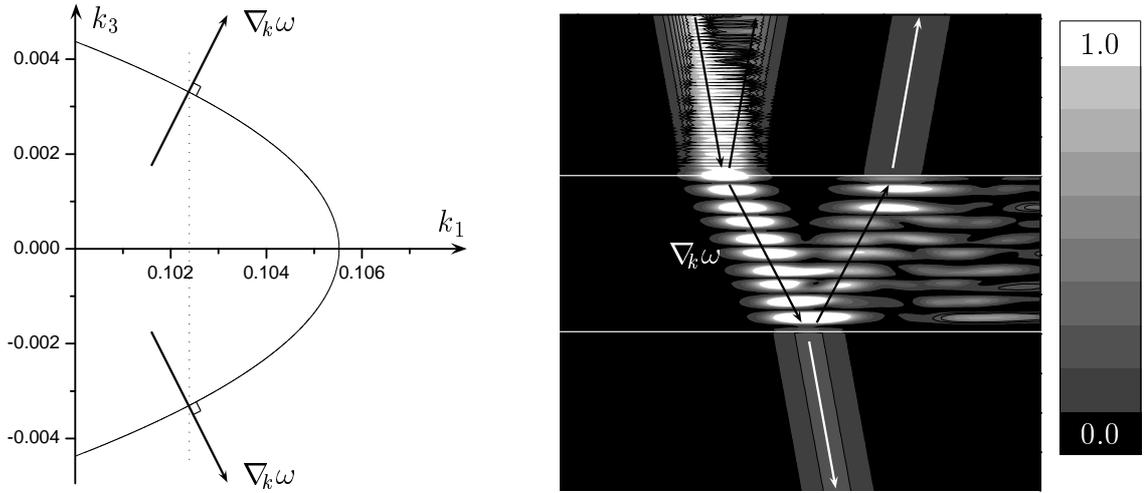


FIG. 6.1: Mise en évidence numérique de l'ultra-réfraction. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal et la vitesse de groupe en $k_1 = 0.1023$ (ce qui correspond à la valeur numérique (6.2) de la variable α_1 ou encore à un angle dans le milieu extérieur de 10 degrés). Nous avons représenté sur la figure de droite le carré du module de la fonction U en superposant la vitesse de groupe. L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction U^i représentant le champ incident.

Mise en évidence numérique de l'ultra-réfraction Nous avons représenté sur la figure 6.1 à droite le carré du module de la fonction U représentant le champ électromagnétique en présence du cristal photonique monodimensionnel (3.11). La trajectoire des rayons coïncide avec la vitesse de groupe à l'intérieur du cristal que nous avons représenté pour la valeur

$$k_1 = 0.1023 \quad (6.3)$$

qui correspond à la valeur (6.2) de l'angle d'incidence moyen. L'angle entre l'axe vertical et la trajectoire des rayons est plus important à l'intérieur du cristal que dans le milieu extérieur qui possède les propriétés du vide. Si nous interprétons les propriétés du cristal comme celles d'un milieu homogène obéissant à la deuxième loi de Descartes, alors les propriétés du cristal sont semblables à celles d'un milieu homogène d'indice optique inférieur à celui du vide.

Ce phénomène, généralement appelé ultra-réfraction, se produit presque systématiquement à l'approche de la frontière Δ_0 à l'intérieur de la bande de transparence B dans le cas d'un cristal photonique monodimensionnel (nous avons défini les domaines Δ_0 et B dans la section 4.1.2). En effet, d'après (4.115,4.111,3.52), l'expression de l'angle θ^c entre l'axe vertical et la trajectoire des rayons à l'intérieur du cristal est

$$|\tan \theta^c| = \frac{1}{\omega h_3 \sqrt{1 - (\text{tr}T/2)^2}} \left| \frac{\partial \text{tr}T/2}{\partial \alpha_1} \right|. \quad (6.4)$$

Alors, d'après la définition (4.4), l'angle θ^c tend systématiquement vers $\pm\pi/2$ quand la variable α_1 s'approche de la frontière Δ_0 si la fonction $\partial\text{tr}T/\partial\alpha_1$ ne s'annule pas sur Δ_0 .

Seulement, ce phénomène est difficilement observable. En effet, d'après (4.27,4.28, 3.52) l'expression du coefficient de réflexion en énergie sur l'interface plane séparant le cristal du superstrat est

$$|r^u|^2 \underset{|\text{tr}T/2| \rightarrow 1^-}{\sim} 1 - \frac{4\beta^u}{|T_{12}|} \sqrt{1 - (\text{tr}T/2)^2}. \quad (6.5)$$

L'association des deux relations (6.4) et (6.5) nous indique que le coefficient de réflexion en énergie $|r^u|^2$ tend systématiquement vers 1 quand l'angle θ^c tend vers $\pm\pi/2$. Autrement dit, l'énergie mise en jeu dans le phénomène de l'ultra-réfraction est d'autant plus petite que le phénomène est spectaculaire.

6.1.2 Mise en évidence numérique de la réfraction négative dans un cristal photonique bidimensionnel

Nous utilisons dans cette section 6.1.2 les notations adaptées aux structures “tas de bois” que nous avons introduites dans le chapitre 5 de cette troisième partie.

Données numériques du cristal photonique bidimensionnel Le cristal photonique bidimensionnel que nous considérons est un bloc homogène d'indice diélectrique proche de celui du SiO_2 (environ 1.45 dans le domaine de l'optique et du proche infrarouge) percé de trous parallèles, de section carrée, et situés sur un réseau carré. Ces trous peuvent donc être interprétés comme des tiges homogènes dont les propriétés sont celles du vide.

La structure “tas de bois” que nous définissons constitue la couche élémentaire du cristal photonique.

La couche élémentaire est une structure “tas de bois” constituée de trois couches lamellaires (figure 6.2). Nous choisissons le repère orthonormé (3.1) tel que les axes des trous soient dirigés suivant la direction e_2 . Alors,

$$L = 3, \quad s(l) = 1 \quad \forall l \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.6)$$

Le cristal photonique bidimensionnel d'épaisseur finie est donc un réseau monodimensionnel périodique dans la direction e_1 . Nous exprimons donc toutes les longueurs en fonction de la période spatiale h_1 . La première couche lamellaire est une couche homogène : elle est donc constituée de

$$M_1 = 1 \quad (6.7)$$

tige dont l'épaisseur, la largeur et la constante diélectrique sont

$$h_{3,1} = h_1/4, \quad w_{1,1} = h_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{1,1}/\varepsilon_0 = (1.45)^2. \quad (6.8)$$

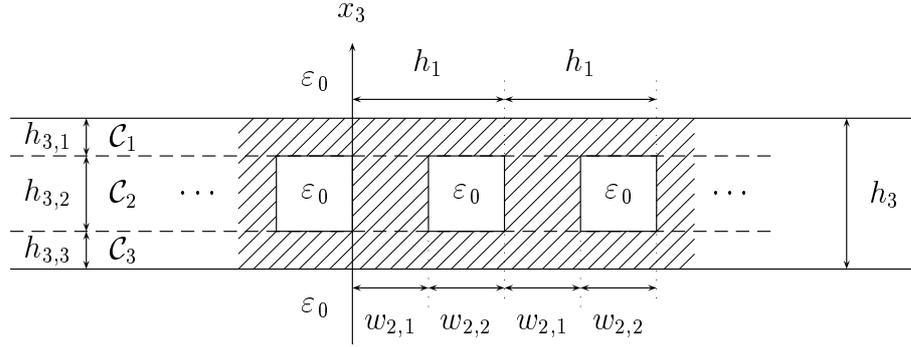


FIG. 6.2: Coupe de la couche élémentaire qui permet d'engendrer le cristal photonique bidimensionnel. La couche élémentaire est constituée de $L = 3$ couches lamellaires. Les première et troisième couches lamellaires sont des couches homogènes. la deuxième couche lamellaire est constituée de $M_2 = 2$ tiges homogènes.

La deuxième couche lamellaire est constituée de

$$M_2 = 2 \quad (6.9)$$

deux tiges dont l'épaisseur, la largeur et la constante diélectrique sont

$$h_{3,2} = h_1/2, \quad w_{2,1} = w_{2,2} = h_1/2, \quad \varepsilon_{2,1}/\varepsilon_0 = (1.45)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2,2} = \varepsilon_0. \quad (6.10)$$

La troisième couche lamellaire est identique à la première couche lamellaire.

$$M_3 = 1, \quad h_{3,3} = h_1/4, \quad w_{3,1} = h_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{3,1}/\varepsilon_0 = (1.45)^2. \quad (6.11)$$

Les trois composantes de la période spatiale d_3 sont

$$d_{3,1} = d_{3,2} = 0 \quad \text{et} \quad d_{3,3} = h_3 = h_{3,1} + h_{3,2} + h_{3,3} = h_1. \quad (6.12)$$

Nous modélisons ce cristal photonique bidimensionnel par un empilement de $n = 1000$ couches élémentaires \mathcal{C} (5.92). La fonction ε vérifie à l'intérieur du cristal

$$\forall x \in \mathcal{C}, \forall n_3 \in \{0, \dots, n-1\} : \varepsilon(x - n_3 d_3) = \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad n = 1000. \quad (6.13)$$

Enfin, le superstrat et le substrat possèdent les propriétés du vide et l'ensemble des matériaux qui constituent la couche élémentaire possèdent les mêmes propriétés magnétiques que le vide.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \mu(x) = \mu_0, \quad \varepsilon(x) = \varepsilon^u \quad \forall x_3 \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = \varepsilon^d \quad \forall x_3 \leq -nh_3. \quad (6.14)$$

Données numériques du champ électromagnétique Le champ incident est une superposition d'ondes planes incidentes \tilde{E}^i d'expression (5.71,5.70,5.74). Les valeurs numériques de la fréquence ω et des angles ϕ^i et δ^i sont pour toutes les ondes planes incidentes

$$2\pi/(\omega h_1 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 1.309, \quad \phi^i = 0 \quad \text{et} \quad \delta^i = 0. \quad (6.15)$$

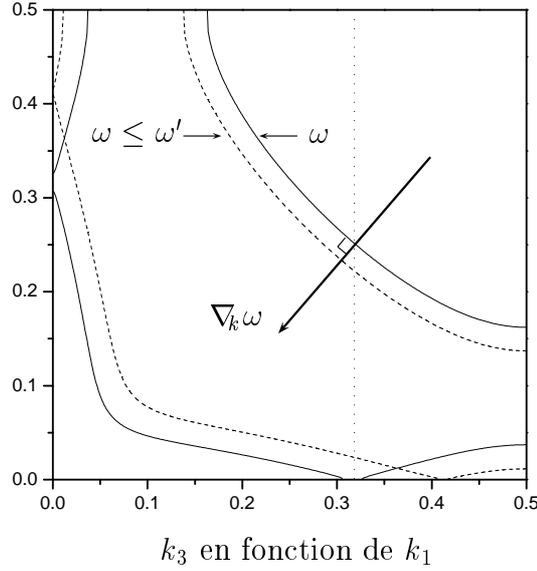


FIG. 6.3: Relation de dispersion à fréquence constante. Nous avons représenté la relation de dispersion avec une ligne continue pour la fréquence ω de valeur numérique (6.15) et avec une ligne discontinue pour la fréquence ω' de valeur numérique légèrement supérieure à celle de ω . Nous avons représenté la vitesse de groupe $\nabla_k \omega$, normale aux courbes de fréquence constante et orientée vers les fréquences croissantes.

Le cristal photonique bidimensionnel que nous venons de décrire est invariant dans la direction e_2 . Alors, le choix (6.15) implique que le problème général se réduit à un problème scalaire ($\phi^i = 0$) de polarisation TE ($\delta^i = 0$) ; le champ électromagnétique total est représenté par l'unique composante $E_{\omega,2}$ et est indépendant de la variable x_2 .

Soit $E_{\omega,2}^i$ la partie incidente de la fonction $E_{\omega,2}$. La fonction $E_{\omega,2}^i$ est une superposition d'ondes planes incidentes. Soit A l'amplitude de cette superposition. Pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x_3 \geq 0$:

$$E_{\omega,2}^i(x_1, x_3) = \int_{[-1/2, 1/2]} A(k_1^i/\omega) \exp(ik_1^i x_1 + ik_3^i x_3) dk_1, \quad (6.16)$$

où l'expression des composantes k_1^i et k_3^i est (5.69). De même que dans la section 6.1.1 précédente, l'amplitude A est la gaussienne (4.72,4.73) centrée en $(k_1^i/\omega) = \alpha_0$, de largeur spatiale L et de support K_A . La valeur numérique de la variable α_0 est

$$\alpha_0/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sin \theta_0 = 0.4163. \quad (6.17)$$

Cette valeur numérique de la variable α_0 implique que l'angle d'incidence moyen du champ incident est $\theta_0 = 24.6$ degrés.

Mise en évidence numérique de la réfraction négative Nous avons représenté sur la figure 6.3 la relation de dispersion (restreinte aux valeurs positives des

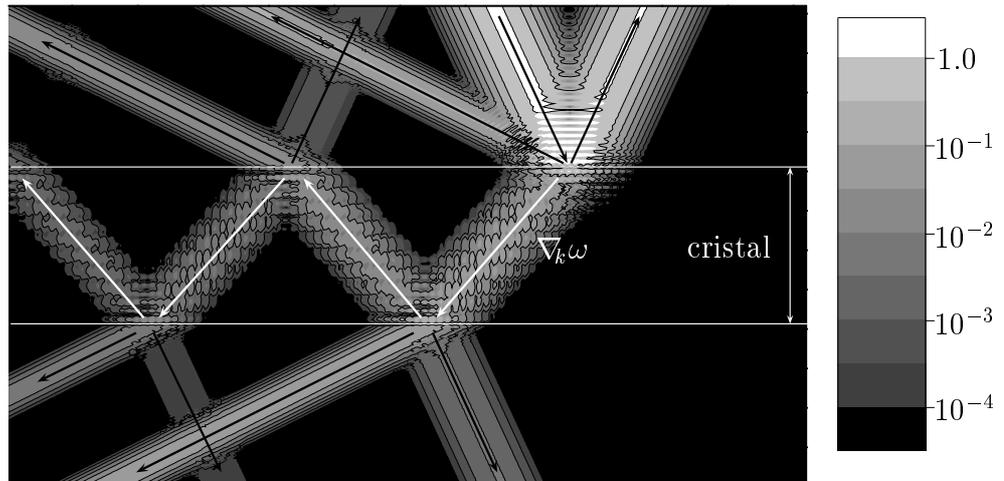


FIG. 6.4: Mise en évidence numérique de la réfraction négative. Nous avons représenté le carré du module de la fonction $E_{\omega,2}$ en superposant la vitesse de groupe. L'échelle de gris est logarithmique : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction $E_{\omega,2}^i$ représentant le champ incident.

composantes k_1 et k_3 en raison des symétries du cristal) pour deux fréquences différentes. Nous pouvons alors lire directement sur la figure 6.3 l'orientation de la vitesse de groupe : la vitesse de groupe est orientée vers les fréquences croissantes. La figure 6.3 nous indique donc que pour la valeur

$$k_1 = 0.318, \quad (6.18)$$

correspondant à la valeur (6.17) de l'angle d'incidence moyen, la trajectoire du champ électromagnétique à l'intérieur du cristal est dirigée vers les x_1 négatifs bien que la trajectoire du champ incident à l'extérieur du cristal soit dirigé vers les x_1 positifs (figure 6.4). Si nous interprétons les propriétés du cristal comme celles d'un milieu homogène obéissant à la deuxième loi de Descartes, alors les propriétés du cristal sont semblables à celles d'un milieu homogène d'indice optique négatif. Ce phénomène que nous avons mis en évidence numériquement sur la figure 6.4 est généralement appelé réfraction négative.

6.1.3 Mise en évidence numérique d'une lentille concave convergente

Nous montrons dans cette section 6.1.3 que les propriétés d'un cristal photonique peuvent être très proches de celles d'un milieu homogène d'indice optique proche de zéro dans certaines conditions. Ce phénomène pourrait en particulier permettre de réaliser des lentilles de distance focale bien plus petite que celle des lentilles usuelles. C'est pourquoi nous étudions numériquement le comportement du champ électromagnétique en présence d'une lentille concave taillée dans un cristal photonique monodimensionnel.

La difficulté consiste à énoncer une règle simple et systématique qui permet d'estimer un tel phénomène *a priori*. J. Dowling *et al.* ont proposé dans [80] d'interpréter la vitesse de phase dans un cristal photonique comme l'inverse de l'indice "effectif" multiplié par la constante de proportionnalité $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (nous entendons par indice "effectif" l'indice du milieu homogène dont les propriétés sont proches de celle du cristal photonique).

L'étude théorique et numérique que nous avons déjà réalisée nous indique que cette interprétation n'est pas la meilleure pour rendre compte de la trajectoire du champ électromagnétique dans un cristal photonique. Seulement, dans cette section 6.1.3, nous nous intéressons à la diffraction par des objets de forme complexe qui, *a priori*, ne rentrent pas dans le cadre que nous avons étudié précédemment. C'est pourquoi, de même que dans [23], nous nous laissons guider par l'interprétation présentée dans [80].

Modélisation d'une lentille concave Nous modélisons une lentille par une structure invariante dans la direction e_2 . Soit \mathcal{L} la lentille concave. La lentille concave \mathcal{L} est le volume délimité par les deux interfaces planes verticales d'équation $x_1 = -W/2$ et $x_1 = W/2$, par l'interface plane horizontale d'équation $x_3 = 0$ et par l'interface cylindrique d'équation $(x_3 - x_3^c)^2 + x_1^2 = R^2$ (figure 6.5).

$$\mathcal{L} = \left\{ x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid -W/2 \leq x_1 \leq W/2, x_3 \leq 0 \right. \\ \left. \text{et } \forall x_1 \in [-R, R] : X_3^c(x_1) \leq x_3 \right\}, \quad (6.19)$$

où

$$W > 0, \quad R > 0, \quad x_3^c < -R, \quad (6.20)$$

et

$$\forall x_1 \in [-R, R] : X_3^c(x_1) = x_3^c + \sqrt{R^2 - x_1^2}. \quad (6.21)$$

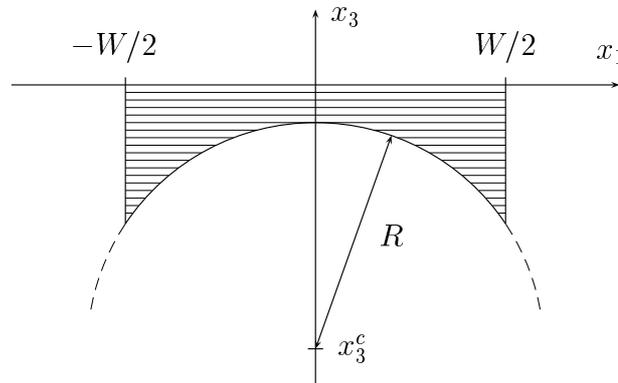


FIG. 6.5: Coupe de la lentille concave \mathcal{L} de largeur W et délimitée par l'interface plane d'équation $x_3 = 0$ et par l'interface cylindrique de rayon R centrée en $(x_1, x_3) = (0, x_3^c)$.

La lentille \mathcal{L} est donc une lentille concave, d'axe (O, x_3) , de largeur W et dont les propriétés optiques dépendent du rayon R et du matériau qui la constitue.

Notre code numérique nous impose de répéter périodiquement la lentille \mathcal{L} . Nous modélisons donc la lentille concave par un réseau de lentilles. Ce réseau de lentilles est un réseau monodimensionnel, périodique dans la direction e_1 de période spatiale W . Soit $\mathcal{L}_\#$ la lentille \mathcal{L} répétée périodiquement.

$$\mathcal{L}_\# = \{(x_1 + n_1 W)e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L}, n_1 \in \mathbb{Z}\}. \quad (6.22)$$

Nous remplissons la lentille $\mathcal{L}_\#$ avec le cristal photonique monodimensionnel particulier que nous avons défini dans la section 3.1.

$$\forall x \in \mathcal{L}_\# : \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \mu(x) \quad \text{vérifient} \quad (3.2, 3.3, 3.6, 3.7). \quad (6.23)$$

Enfin, le milieu extérieur possède les mêmes propriétés que le vide.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}_\# : \varepsilon(x) = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu_0. \quad (6.24)$$

Notre modélisation de la lentille comporte deux hypothèses que nous commençons.

Premièrement, nous supposons que les lentilles que nous ajoutons artificiellement ont une influence négligeable sur le champ électromagnétique. En effet, le champ électromagnétique est une nappe dont les dimensions sont comparables à celle d'une lentille. L'énergie électromagnétique de cette nappe est donc concentrée sur une unique lentille et est négligeable en présence de celles ajoutées artificiellement. Alors, cette première hypothèse est justifiée si l'influence de la matière est négligeable là où l'énergie électromagnétique est elle-même négligeable.

Deuxièmement, notre code numérique ne nous permet pas de décrire fidèlement la courbe d'équation $x_3 = X_3^c(x_1)$ définissant l'interface cylindrique de la lentille. Nous approchons cette courbe par une fonction constante par morceaux constituée d'autant de marches d'escalier qu'il y a de strates homogènes dans le cristal photonique remplissant la lentille. Cette approximation est parfaitement justifiée si la longueur d'onde est grande devant les dimensions des marches d'escalier [81]. Seulement, dans notre cas, la longueur d'onde est du même ordre de grandeur que les dimensions des marches d'escalier. L'unique justification de notre modélisation que nous pouvons apporter *a priori* est que les dimensions de la lentille sont très grandes devant la longueur d'onde et que le champ électromagnétique est une nappe dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que celles de la lentille. Nous supposons donc qu'à cette échelle très grande devant la longueur d'onde, l'influence de la petite déviation que constituent les marches d'escalier est négligeable. Surtout, nous réaliserons un test dans le cas où la lentille est remplie d'un matériau homogène pour valider cette seconde hypothèse.

Données numériques de la lentille concave Le cristal photonique monodimensionnel qui remplit la lentille est identique à celui que nous avons défini dans la

section 4.5.4. Nous exprimons les trois paramètres (6.20) qui déterminent la forme de la lentille en fonction de la période spatiale h_3 du cristal.

$$W = 60h_3, \quad R = 60h_3, \quad \text{et} \quad x_3^c = -70h_3. \quad (6.25)$$

Les dimensions de la lentille sont donc très grandes devant les dimensions du cristal photonique qui la remplit. Les marches d'escalier de la fonction qui approche l'interface cylindrique de la lentille constituent donc une petite déviation.

Données numériques du champ électromagnétique Les valeurs numériques de la fréquence ω et des angles ϕ^i et δ^i sont pour toutes les ondes planes incidentes

$$2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 1.697, \quad \phi^i = 0 \quad \text{et} \quad \delta^i = 0. \quad (6.26)$$

De même que dans la section 6.1.2, l'amplitude A qui définit (6.16) la fonction $E_{\omega,2}^i$ représentant le champ incident est la gaussienne (4.72) centrée en $(k_1^i/\omega) = \alpha_0$, de largeur spatiale L et de support K_A . La valeur numérique de la variable α_0 et de la largeur spatiale L sont

$$\alpha_0/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 0 \quad \text{et} \quad L = 30h_3. \quad (6.27)$$

Le support K_A de l'amplitude A est (4.73) où les valeurs numériques de la largeur spatiale L et de la fréquence ω sont (6.27) et (6.26).

La largeur spatiale L de la gaussienne représentant le champ électromagnétique est deux fois plus petite que la largeur W de la lentille. L'énergie électromagnétique est donc concentrée sur une unique lentille. Enfin, la largeur spatiale L est très grande devant les dimensions du cristal photonique qui remplit la lentille. La nappe que constitue le champ électromagnétique est donc très grande devant les marches d'escalier de la fonction qui approche l'interface cylindrique de la lentille.

Mise en évidence numérique d'une lentille concave convergente Nous avons représenté sur la figure 6.6 à gauche la relation de dispersion du cristal photonique monodimensionnel pour la valeur numérique (6.26) de la fréquence. Il est proposé dans [80, 23] de définir un indice "effectif" à partir de la vitesse de phase dans le cristal photonique. Soit ε_{eff} la constante diélectrique "effective locale" du cristal (cette constante diélectrique dépend fortement de l'angle d'incidence).

$$\forall (k_1^i/\omega) \in K_A : \varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0 = [2\pi/(h_3 \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})]^2 (k_1^2 + k_3^2) \approx (0.025)^2. \quad (6.28)$$

Soit x_3^f l'altitude à laquelle l'énergie transmise par la lentille se focalise. Si nous utilisons l'approximation des petits angles, la constante diélectrique "effective" permet de donner une estimation théorique cette altitude :

$$x_3^c - x_3^f = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}}{1 - \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}} R \approx \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0} R. \quad (6.29)$$

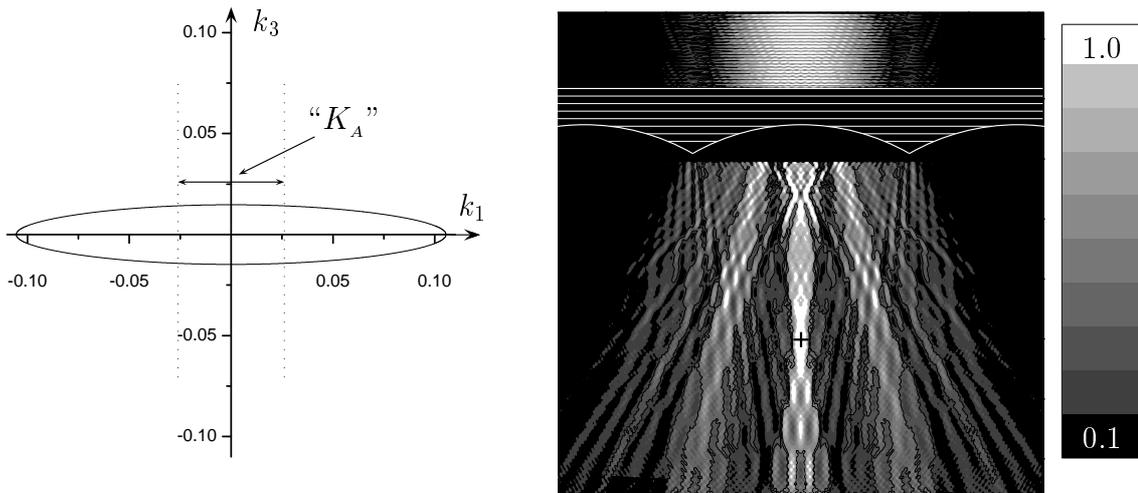


FIG. 6.6: Mise en évidence numérique d'une lentille concave convergente. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal. Nous avons représenté sur la figure de droite le carré du module de la fonction $E_{\omega,2}$ à l'extérieur de la structure "tas de bois". L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction $E_{\omega,2}^i$ représentant le champ incident.

Nous avons représenté sur la figure 6.6 à droite le champ électromagnétique en présence du réseau de lentilles. Nous constatons que l'énergie transmise se focalise à proximité du centre $(0, x_3^c)$ du cercle de rayon R représenté par le symbole $+$. L'étendue de la tache d'énergie autour du centre $(0, x_3^c)$ ne nous permet pas lire précisément l'altitude x_3^f . Nous pouvons cependant remarquer que la position de la tache d'énergie focalisée n'est pas en contradiction avec l'estimation théorique (6.29) de l'altitude x_3^f . Nous obtenons donc des résultats semblables à ceux déjà obtenus dans le cas d'un cristal photonique bidimensionnel [23].

Diffraction par une lentille concave remplie d'un matériau homogène

Nous reproduisons l'exemple précédent en remplaçant la valeur numérique de la fonction ε par la constante diélectrique "effective" (6.28) à l'intérieur de la lentille.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{eff}} \implies \varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{eff}} \quad \forall x \in \mathcal{L}_{\#}. \quad (6.30)$$

La figure 6.7 nous permet de vérifier que notre modélisation de la lentille est correcte. Elle permet également de constater que la tache d'énergie produite par le cristal photonique monodimensionnel est proche de celle produite par le milieu homogène dont l'indice "effectif" est défini à partir de la vitesse de phase dans le cristal photonique. L'interprétation proposée dans [80] est donc confirmée par cet exemple numérique.

Enfin, nous pouvons remarquer que l'énergie focalisée par la lentille en cristal photonique est bien plus importante que l'énergie focalisée par la lentille homogène. L'énergie transmise par la lentille homogène est déterminée par la constante diélectrique "effective" (d'après l'expression du coefficient en énergie de Fresnel, elle est

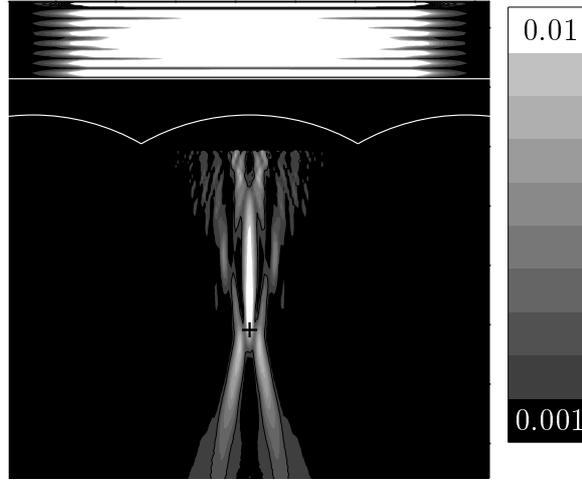


FIG. 6.7: Diffraction par une lentille remplie d'un matériau homogène de constante diélectrique $\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0 = (0.025)^2$.

peu différente de $16\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0$). L'énergie transmise par la lentille en cristal photonique est déterminée par le coefficient de réflexion en énergie d'expression (4.27). Ce coefficient de réflexion en énergie n'obéit pas à la même loi que le coefficient de réflexion en énergie de Fresnel. Ainsi, comme le montre la figure 6.6, les propriétés d'un cristal photonique monodimensionnel peuvent être proches de celles d'un milieu homogène d'indice optique proche de zéro mais avec une énergie transmise par le cristal qui n'est pas négligeable.

6.2 Influence d'une interface plane quelconque séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur

Dans cette section 6.2 nous étudions précisément l'influence d'une interface plane quelconque qui sépare un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur. Cette étude nous permettra alors de prévoir et de mettre en évidence numériquement d'autres phénomènes de réfraction inhabituels.

Nous utilisons dans cette section deux systèmes de coordonnées orthonormés. Le premier système de coordonnées (3.1) est associé au cristal photonique monodimensionnel et le deuxième système de coordonnées est associé à l'interface plane séparant le cristal du milieu extérieur. Soit (O, e'_1, e'_2, e'_3) le deuxième repère orthonormé. Tout élément x de l'espace \mathbb{R}^3 est repéré à la fois par ses trois coordonnées (x_1, x_2, x_3) associées au repère (3.1) et par ses trois coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) associées au repère (O, e'_1, e'_2, e'_3) .

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 \quad \text{avec} \quad e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.31)$$

6.2.1 Description de la structure

L'espace \mathbb{R}^3 est séparé en deux par le plan d'équation $x'_3 = 0$. Le demi-espace supérieur (ou superstrat) est constitué d'un milieu homogène caractérisé par les constantes positives ε^u et μ^u (figure 6.8).

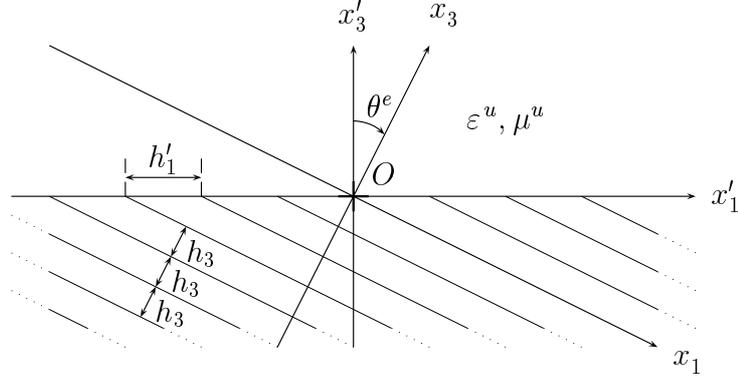


FIG. 6.8: Représentation d'une interface plane quelconque séparant un milieu homogène d'un cristal photonique monodimensionnel.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : x'_3 \geq 0 \implies \varepsilon(x) = \varepsilon^u \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu^u. \quad (6.32)$$

Le demi-espace inférieur est constitué d'un cristal photonique monodimensionnel périodique dans la direction e_3 . Les fonctions ε et μ ne dépendent alors que de la variable x_3 .

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : x'_3 \leq 0 \implies \varepsilon(x) = \varepsilon(x_3) \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu(x_3). \quad (6.33)$$

Les fonctions ε et μ sont périodiques dans la direction e_3 de période spatiale h_3 dans tout le demi-espace inférieur (figure 6.8). Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $n_3 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x'_3 \leq 0 \quad \text{et} \quad x'_3 + n_3 h_3 e_3 \cdot e'_3 \leq 0 &\implies \varepsilon(x_3 + n_3 h_3) = \varepsilon(x_3), \\ x'_3 \leq 0 \quad \text{et} \quad x'_3 + n_3 h_3 e_3 \cdot e'_3 \leq 0 &\implies \mu(x_3 + n_3 h_3) = \mu(x_3). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Enfin, nous pouvons choisir les repères (O, e_1, e_2, e_3) et (O, e'_1, e'_2, e'_3) tels que que les deux vecteurs e_2 et e'_2 coïncident. Nous repérons alors l'interface plane d'équation $x'_3 = 0$ par l'angle θ^e entre le vecteur e'_3 qui lui est normal et le vecteur e_3 qui est la direction dans laquelle le cristal est périodique (figure 6.8).

$$e_2 = e'_2, \quad \cos \theta^e = e_3 \cdot e'_3 \quad \text{et} \quad \sin \theta^e = e_1 \cdot e'_3. \quad (6.35)$$

6.2.2 Symétries de la structure

Nous considérons le cas où l'angle θ^e est non-nul (nous avons déjà étudié en détail le cas particulier où θ^e est nul dans la deuxième partie). La structure que

nous venons de décrire est un réseau monodimensionnel ; les fonctions ε et μ qui vérifient (6.32,6.33,6.34) sont indépendantes de la variable $x'_2 = x_2$ et, surtout, sont périodiques dans la direction e'_1 de période spatiale h'_1 .

$$(6.32, 6.33, 6.34) \implies \forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x) = \varepsilon(x'_1, x'_3) \text{ et } \mu(x) = \mu(x'_1, x'_3).$$

$$\varepsilon(x + n'_1 h'_1 e'_1) = \varepsilon(x) \quad \forall n'_1 \in \mathbb{Z}, \quad (6.36)$$

$$\mu(x + n'_1 h'_1 e'_1) = \mu(x) \quad \forall n'_1 \in \mathbb{Z},$$

où

$$h'_1 = h_3 / |\sin \theta^e|. \quad (6.37)$$

A ce stade, de même que dans le chapitre 5, nous faisons les hypothèses nécessaires sur le champ électromagnétique harmonique puis nous utilisons les symétries du réseau.

6.2.3 Hypothèse sur le champ électromagnétique harmonique

Le champ électromagnétique harmonique est représenté par les deux champs complexes E_ω et H_ω qui dépendent de la seule variable d'espace $x \in \mathbb{R}^3$ (3). Nous supposons dans cette section 6.2 que les champs complexes E_ω et H_ω vérifient l'hypothèse suivante, analogue à l'hypothèse III.1 (5.14).

Hypothèse III.1' Les champs complexes E_ω et H_ω sont tels que, pour tout $x'_3 \in \mathbb{R}$, les fonctions $E_\omega(\cdot, \cdot, x'_3)$ et $H_\omega(\cdot, \cdot, x'_3)$ soient de carré sommable.

$$\int_{\mathbb{R}^2} |E_\omega(x'_1, x'_2, x'_3)|^2 + |H_\omega(x'_1, x'_2, x'_3)|^2 dx'_1 dx'_2 < \infty \quad \forall x'_3 \in \mathbb{R}. \quad (6.38)$$

6.2.4 Conséquence des symétries : décomposition de Floquet partielle

D'après (6.36), la structure que nous considérons dans cette section 6.2 est invariante dans la direction e'_2 et périodique dans la direction e'_1 . Alors, d'après l'hypothèse (6.38) nous pouvons réaliser une décomposition du problème général : nous utilisons la transformation de Fourier dans la direction e'_2 et la transformation de Floquet-Bloch dans la direction e'_1 .

Définition de la transformation de Fourier Nous pouvons définir formellement la transformation Fourier que nous utilisons dans cette section 6.2.1. Soit \widehat{G} la transformée de Fourier de G . Alors, pour tout $G = E_\omega, H_\omega$, et pour tout $(x'_1, k'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\widehat{G}(x'_1, k'_2, x'_3) = \frac{1}{h'_2} \int_{\mathbb{R}} G(x'_1, x'_2, x'_3) \exp[-2i\pi k'_2(x'_2/h'_2)] dx'_2, \quad \text{où } h'_2 > 0. \quad (6.39)$$

La transformation de Floquet-Bloch associée au réseau monodimensionnel $\{n'_1 h'_1 e'_1 \mid n'_1 \in \mathbb{Z}\}$ Par analogie avec la section 5.2.2, nous pouvons définir formellement la transformation de Floquet-Bloch \mathcal{U}_1 associée au réseau monodimensionnel. Pour tout $G = E_\omega, H_\omega$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $k'_1 \in [-1/2, 1/2]$:

$$(\mathcal{U}_1 G)(x, k'_1) = \sum_{n'_1 \in \mathbb{Z}} G(x + n'_1 h'_1 e'_1) \exp(-2i\pi n'_1 k'_1). \quad (6.40)$$

La transformation de Floquet-Bloch inverse associée au réseau monodimensionnel $\{n'_1 h'_1 e'_1 \mid n'_1 \in \mathbb{Z}\}$ De même que dans la section 5.2.2, nous pouvons recomposer les champs E_ω et H_ω en utilisant la transformation de Floquet-Bloch inverse. Pour tout $G = E_\omega, H_\omega$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$G(x) = [\mathcal{U}_1^{-1}(\mathcal{U}_1 G)](x) = \int_{[-1/2, 1/2]} (\mathcal{U}_1 G)(x, k'_1) dk'_1. \quad (6.41)$$

Le problème général qui consiste à résoudre les équations de Maxwell harmoniques (4) se décompose donc en une famille de problèmes élémentaires indexée par le paramètre (k'_1, k'_2) décrivant l'ensemble $[-1/2, 1/2] \times \mathbb{R}$. Soient ∂'_1 et ∂'_3 les opérateurs de dérivation par rapport aux variables x'_1 et x'_3 . Chaque problème élémentaire consiste à résoudre l'équation

$$\begin{aligned} [\partial'_1 e'_1 + i(2\pi/h'_2)k'_2 e'_2 + \partial'_3 e'_3] \times \tilde{E} - i\omega\mu\tilde{H} &= 0, \\ [\partial'_1 e'_1 + i(2\pi/h'_2)k'_2 e'_2 + \partial'_3 e'_3] \times \tilde{H} + i\omega\varepsilon\tilde{E} &= 0, \end{aligned} \quad (6.42)$$

où les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} sont localement de carré sommable par rapport à la variable x'_1 ,

$$\int_{[0, h'_1]} |\tilde{E}(x'_1, x'_3)|^2 + |\tilde{H}(x'_1, x'_3)|^2 dx'_1 < \infty \quad \forall x'_3 \in \mathbb{R}, \quad (6.43)$$

et où les fonctions \tilde{E} et \tilde{H} vérifient les conditions de Bloch à la frontière de l'intervalle $[0, h'_1]$.

$$\begin{aligned} \forall (x'_1, x'_3) \in \mathbb{R}^2, \forall n'_1 \in \mathbb{Z} : \tilde{E}(x'_1, +n'_1 h'_1, x'_3) &= \exp(2i\pi n'_1 k'_1) \tilde{E}(x'_1, x'_3), \\ \forall (x'_1, x'_3) \in \mathbb{R}^2, \forall n'_1 \in \mathbb{Z} : \tilde{H}(x'_1, +n'_1 h'_1, x'_3) &= \exp(2i\pi n'_1 k'_1) \tilde{H}(x'_1, x'_3). \end{aligned} \quad (6.44)$$

6.2.5 Influence d'une interface plane séparant un milieu homogène et un cristal monodimensionnel

Nous considérons l'équation (6.42) dans le demi-espace inférieur rempli par le cristal. Une solution propagative dans la direction e'_3 de l'équation (6.42) est propagative dans les trois directions de l'espace (la condition (6.44) implique que la solution est propagative dans la direction e'_1 et la dépendance en x'_2 est de type onde plane). Une telle solution est donc une fonction de Bloch dans le cristal: cette fonction de Bloch est associée à un point de la relation de dispersion dans le cristal photonique.

Nous pouvons reproduire le même raisonnement dans le demi-espace supérieur rempli par le milieu homogène. Alors, la relation de dispersion du milieu homogène

$$k_3^u(\omega, k_1', k_2') \in \mathbb{R} \quad (6.45)$$

détermine les solutions propagatives dans le demi-plan supérieur et la relation de dispersion du cristal monodimensionnel

$$k_3'(\omega, k_1', k_2') \in \mathbb{R} \quad (6.46)$$

détermine les solutions propagatives dans le demi-plan inférieur.

La décomposition du problème que nous avons réalisée (en utilisant les transformations de Fourier (6.39) et de Floquet-Bloch (6.40)) montre que les composantes k_1' et k_2' du vecteur $k = (k_1', k_2', k_3')$ à l'intérieur du cristal monodimensionnel coïncident avec celles du vecteur $k^u = (k_1', k_2', k_3^u)$ dans le milieu homogène extérieur. Nous retiendrons donc la propriété suivante.

Propriété 6.1 *Soit une interface plane séparant un milieu homogène et un cristal photonique monodimensionnel. Soient $\omega(k^u)$ et $\omega(k)$ les relations de dispersion dans le milieu homogène et dans le cristal photonique monodimensionnel. Alors, une solution propagative dans le milieu homogène associée au vecteur k^u est couplée à une solution propagative dans le cristal photonique monodimensionnel associée au vecteur k si les composantes tangentielles des vecteurs k^u et k coïncident.*

6.2.6 Conclusion

Nous avons déterminé l'influence d'une interface plane quelconque séparant un cristal photonique monodimensionnel d'un milieu homogène : notre résultat est résumé dans la propriété 6.1. Nous utilisons ce résultat dans la suite de ce chapitre 6 ; nous montrons des exemples numériques de réfraction inhabituels que seul ce résultat permet d'expliquer et de prévoir.

La même étude dans le cas des cristaux photoniques bi et tridimensionnels est dans le cas général plus délicate. En effet, si nous coupons un cristal photonique bi ou tridimensionnel par un plan quelconque, la structure obtenue est, dans le cas général, une structure non pas périodique mais quasi-périodique dans les deux directions du plan [82, 21]. Nous ne pouvons donc pas utiliser la transformation de Floquet-Bloch pour montrer que les composantes tangentielles du vecteur k sont conservées au passage de l'interface plane dans le cas général.

Seulement, il est possible de couper un cristal photonique bi ou tridimensionnel par des plans particuliers tels que la structure obtenue soit périodique dans les deux directions du plan [21] : il faut et il suffit qu'un tel plan contienne une face d'une maille élémentaire permettant d'engendrer le cristal. Alors, dans ce cas particulier, nous pouvons montrer par un raisonnement analogue à celui de cette section 6.2 que les composantes tangentielles du vecteur k sont conservées. En pratique, si nous considérons un cristal photonique bidimensionnel constitué de tiges parallèles, une

condition suffisante pour pouvoir utiliser la propriété 6.1 est que la structure finale ne comporte que des tiges entières. Ainsi, dans [23], la propriété 6.1 permet de justifier les propriétés de diffraction d'une lentille concave et d'un prisme constitués de tiges circulaires.

6.3 Mise en évidence numérique de l'influence d'une interface plane séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur

Dans cette section 6.3 nous montrons numériquement que la propriété 6.1 permet de rendre compte fidèlement de l'influence d'une interface plane séparant un cristal monodimensionnel du milieu extérieur.

Pour cela, nous mettons en présence un même cristal et un même champ incident dans deux cas où seules les interfaces planes qui séparent le cristal du milieu extérieur sont modifiées : nous montrons alors que le comportement du champ électromagnétique en présence du cristal est radicalement différent dans les deux cas. De plus, nous mettons en évidence numériquement un phénomène de réfraction particulièrement spectaculaire.

6.3.1 Exemple numérique de référence

Données numériques du cristal photonique monodimensionnel Nous considérons le même cristal photonique monodimensionnel que dans les sections 4.5.4 et 6.1.1. Le repère (3.1) associé au cristal coïncide avec le repère (6.31) associé aux interfaces planes qui séparent le cristal du milieu extérieur. L'équation de ces interfaces est

$$x_3 = x'_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = x'_3 = -nh_3 \quad \text{avec} \quad n = 1000. \quad (6.47)$$

Données numériques du champ électromagnétique La valeur numérique de la fréquence et la polarisation (3.11) du champ électromagnétique sont

$$2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 3.0 \quad \text{et} \quad H_{\omega,2} = 0 \quad (\text{polarisation TE}). \quad (6.48)$$

De même que dans la section 4.5.4, l'amplitude A qui définit (3.60) la fonction U^i représentant le champ incident est la gaussienne (4.72,4.73) centrée en $\alpha_1 = \alpha_0$, de largeur spatiale L et de support K_A . La valeur numérique de la variable α_0 est

$$\alpha_0 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \sin \theta_0 = 0.342. \quad (6.49)$$

Cette valeur numérique de la variable α_0 implique que l'angle d'incidence moyen du champ incident est $\theta_0 = 20$ degrés.

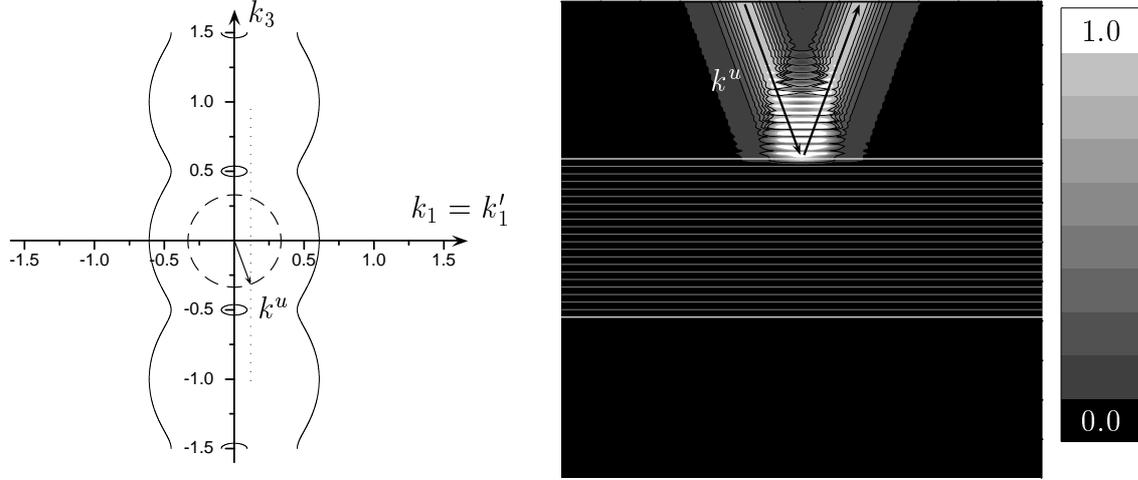


FIG. 6.9: Exemple numérique de référence. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal avec une ligne continue et la relation de dispersion dans le milieu homogène extérieur avec une ligne discontinue. Nous avons représenté sur la figure de droite le carré du module de la fonction U . L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction U^i représentant le champ incident. Les lignes horizontales symbolisent les couches élémentaires qui constituent le cristal photonique monodimensionnel.

Exemple numérique de référence Dans ce cas particulier, c'est la composante $k_1 = k'_1$ du vecteur k^u qui est conservée au passage de l'interface plane d'équation $x_3 = 0$: nous avons symbolisé cette conservation par la ligne verticale de pointillés sur la figure 6.9 à gauche. La relation de dispersion dans le cristal, représentée avec une ligne continue sur la figure 6.9 à gauche, montre qu'il n'existe pas de solution propagative dans le cristal pour la valeur

$$k_1 = k'_1 = 0.114 \quad (6.50)$$

qui correspond à la valeur (6.49) de l'angle d'incidence moyen. La représentation du champ électromagnétique sur la figure 6.9 à droite confirme ce résultat : le champ électromagnétique incident est totalement réfléchi.

6.3.2 Mise en évidence numérique de l'influence d'une interface plane

Données numériques du système Le système constitué du cristal photonique monodimensionnel et du champ électromagnétique est identique à celui de la section 6.3.1 précédente. Seules les interfaces planes qui séparent le cristal du milieu extérieur sont modifiées : l'équation des interfaces planes est

$$x'_3 = 0 \quad \text{et} \quad x'_3 = -nh_3 \quad \text{avec} \quad n = 1000, \quad (6.51)$$

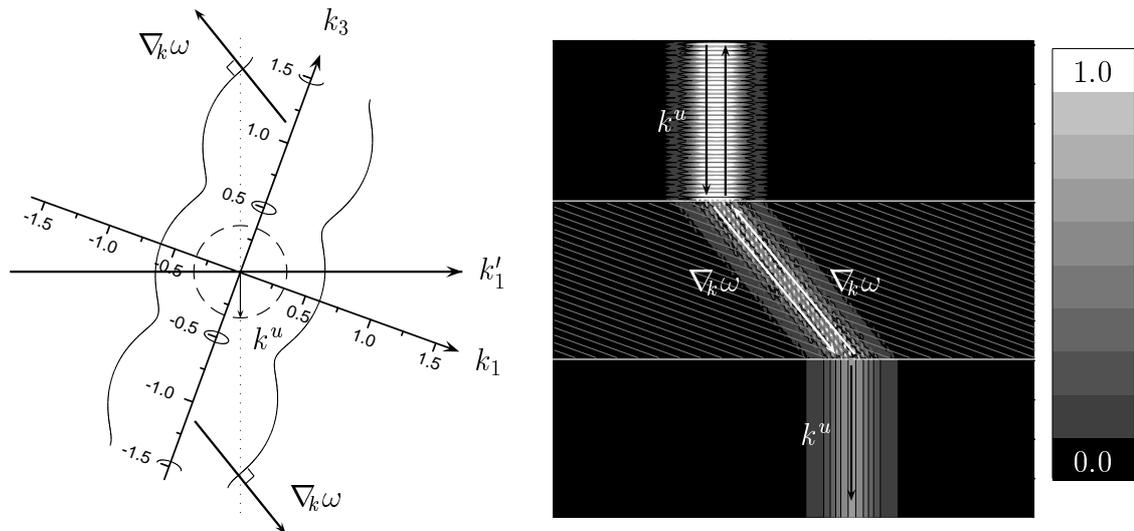


FIG. 6.10: Mise en évidence numérique de l'influence d'une interface plane. Nous avons réalisé une rotation de $\theta_0 = 20$ degrés de la figure 6.9 : seules les interfaces planes sont restées invariantes. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal avec une ligne continue et la relation de dispersion dans le milieu homogène extérieur avec une ligne discontinue. Nous avons représenté sur la figure de droite le carré du module de la fonction U . L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction U^i représentant le champ incident. Les lignes obliques symbolisent les couches élémentaires qui constituent le cristal photonique monodimensionnel.

où

$$\theta^e = -\theta_0 \implies x'_3 = x_3 \sin \theta_0 - x_1 \cos \theta_0 . \quad (6.52)$$

Modélisation numérique de la structure Notre code numérique ne nous permet pas de décrire fidèlement les interfaces planes obliques qui séparent les différentes strates homogènes du cristal photonique monodimensionnel. Nous approchons ces interfaces obliques par des fonctions constantes par morceaux. Les marches de ces fonctions constantes par morceaux possèdent une hauteur de $0.1h_3$ et une largeur de $0.1h_3 / \tan \theta^e \approx 0.275h_3$. D'après (6.48), la longueur d'onde du champ électromagnétique (égale à $3.0h_3$) est très supérieure aux dimensions des marches d'escaliers des fonctions qui approchent les interfaces obliques. Cette approximation est donc parfaitement justifiée [81].

Mise en évidence numérique de l'influence d'une interface plane D'après la propriété 6.1, c'est la composante $k'_1 = 0$ qui est conservée au passage de l'interface de l'interface plane d'équation $x'_3 = 0$: nous avons symbolisé cette conservation par la ligne verticale (donc normale à l'interface plane horizontale) de pointillés sur la figure 6.10 à gauche. La relation de dispersion du cristal montre qu'il existe deux

solutions propagatives de directions opposées en incidence normale ; ces deux directions de propagation sont opposées en raison des symétries de tout cristal photonique monodimensionnel. La représentation du champ électromagnétique sur la figure 6.10 à gauche confirme ce résultat : le champ électromagnétique incident pénètre dans le cristal photonique, se propage suivant la vitesse de groupe dans le cristal puis sort du cristal.

Cet exemple numérique met en évidence deux phénomènes qui nous semblent *a priori* peu intuitifs.

Premier phénomène Le champ électromagnétique et le cristal photonique sont en tout point identiques sur les figures 6.9 et 6.10. Pourtant, dans le premier cas, le champ électromagnétique ne peut pas se propager dans le cristal (le champ électromagnétique incident est totalement réfléchi sur la figure 6.9) et, dans le second cas, le même champ électromagnétique peut se propager dans le même cristal (le champ électromagnétique pénètre dans le cristal sur la figure 6.10).

Ce phénomène nous indique d'abord que l'influence des interfaces n'est pas négligeable et qu'elle mérite d'être prise en compte. Ce phénomène nous indique également que la notion de réflexion totale quelle que soit la direction incidente doit être considérée avec précaution. Il existe des cristaux photoniques monodimensionnels qui sont capables de réfléchir la totalité d'un champ électromagnétique quelle que soit la direction incidente. Ce résultat, mis en évidence expérimentalement [83], suppose que les interfaces séparant le cristal du milieu extérieur sont toutes parallèles aux strates homogènes qui constituent le cristal (cas de la section 6.3.1). Notre étude nous indique que si nous éclairons un tel cristal sur une interface qui n'est pas parallèle aux strates homogènes, alors le champ électromagnétique pénètre inévitablement dans le cristal (de même que sur la figure 6.10 à gauche, il existe toujours des solutions propagatives dans un cristal photonique monodimensionnel si l'angle θ^e entre l'interface et les strates du cristal est non-nul).

Second phénomène Bien qu'en parfait accord avec la théorie, la trajectoire du champ électromagnétique sur la figure 6.10 est surprenante pour deux raisons.

D'une part, si nous interprétons les propriétés du cristal comme celles d'un milieu homogène obéissant à la deuxième loi de Descartes, alors les propriétés du cristal sont semblables à celles d'un milieu homogène d'indice optique qui tend d'une certaine façon vers zéro quand l'angle d'incidence moyen du champ incident est nul. Cette propriété semblait *a priori* impossible à observer dans le cas de l'ultra-réfraction "classique" de la section 6.1 en raison de la relation entre l'expression (6.4) de l'angle θ^c et l'expression (6.5) du coefficient de réflexion en énergie.

D'autre part, la trajectoire du champ électromagnétique à l'intérieur du cristal est contraire à l'intuition (figure 6.10). Quand un rayon à l'intérieur du cristal frappe une interface séparant le cristal du milieu extérieur, le rayon réfléchi adopte la trajectoire opposée de celle du rayon incident : ce phénomène est contraire à la première loi de Descartes qui impliquerait que le rayon réfléchi adopte une trajectoire symétrique par rapport à l'axe vertical de celle du rayon incident.

6.3.3 Conclusion

L'étude numérique de cette section 6.3 nous a permis de confirmer la propriété 6.1 qui décrit l'influence d'une interface plane quelconque.

Cette étude de l'influence d'une interface plane quelconque nous indique que le champ électromagnétique peut toujours pénétrer et se propager à l'intérieur d'un cristal photonique monodimensionnel de taille finie (un cristal de taille finie possède inévitablement des interfaces non-parallèles aux strates du cristal).

Enfin, cette étude nous a permis de mettre en évidence un phénomène d'ultra-réfraction particulièrement spectaculaire représenté sur la figure 6.10.

6.4 Etude de l'influence d'une interface quelconque suffisamment régulière séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur

Nous déterminons de façon approchée l'influence d'une interface quelconque suffisamment régulière directement à partir de la propriété 6.1. Nous vérifions ensuite au moyen d'un exemple numérique que notre affirmation est fondée.

L'exemple numérique que nous considérons dans cette section 6.4 est la lentille concave que nous avons définie dans la section 6.1.3. Notre étude de l'influence des interfaces quelconques permet de donner une estimation des propriétés d'une lentille en cristal photonique alternative à celle issue de la notion d'indice "effectif". Seulement, les estimations théoriques issues de notre interprétation et de la notion d'indice "effectif" ne coïncident pas dans tous les cas. C'est pourquoi nous présenterons un exemple numérique qui confirme notre interprétation des propriétés des lentilles en cristal photonique.

6.4.1 Diffraction par un cristal photonique monodimensionnel de forme quelconque dans le domaine de l'optique géométrique

Nous considérons dans cette section 6.4.1 un cristal photonique monodimensionnel de forme quelconque. Nous utilisons la propriété 6.1 pour déterminer l'influence d'une interface quelconque suffisamment régulière.

Propriété 6.2 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le volume occupé par le cristal photonique monodimensionnel et $\partial\Omega$ la frontière de ce volume (figure 6.11). Nous supposons que la surface $\partial\Omega$ est suffisamment régulière pour pouvoir définir le plan qui lui est tangent en chacun de ses points (figure 6.11). Nous supposons que nous sommes dans le domaine de l'optique géométrique ; le champ électromagnétique incident est un faisceau dont les dimensions sont petites devant les dimensions du cristal remplissant le volume Ω . Nous supposons que les dimensions de l'empreinte sur le cristal du*

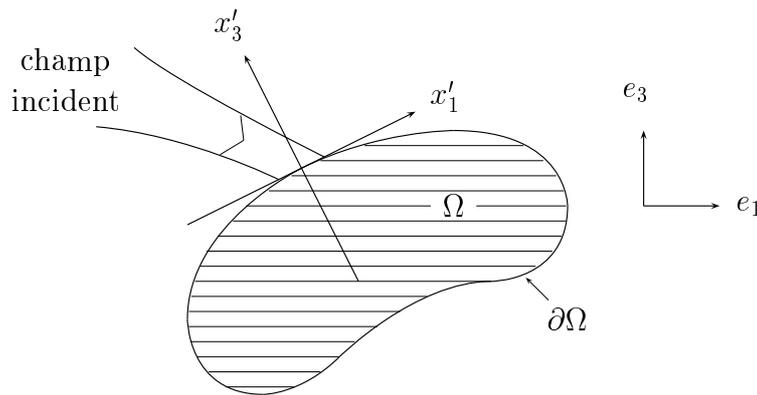


FIG. 6.11: *Diffraction par un cristal photonique monodimensionnel de forme quelconque. Les lignes horizontales symbolisent les couches élémentaires qui constituent le cristal photonique monodimensionnel.*

faisceau incident sont suffisamment petites pour que la surface $\partial\Omega$ soit proche du plan qui lui est tangent sur l'ensemble de l'empreinte.

Alors, le comportement du champ électromagnétique au voisinage de l'empreinte est proche de celui du même champ électromagnétique en présence du cristal où nous avons remplacé la frontière $\partial\Omega$ par l'interface plane que constitue le plan qui est tangent au point d'impact. Le comportement du champ électromagnétique en présence de l'interface plane que constitue le plan qui est tangent au point d'impact est décrite par la propriété 6.1.

6.4.2 Etude numérique de l'influence d'une interface cylindrique séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur

La propriété 6.2 que nous venons d'énoncer nous permet d'estimer les propriétés de la lentille que nous avons décrite dans la section 6.1.3 à partir de la relation de dispersion représentée sur la figure 6.6. Dans le cas des données numériques de la section 6.1.3, l'estimation issue de la propriété 6.2 est proche de celle issue de la notion d'indice "effectif". L'étendue de la tache d'énergie représentée sur la figure 6.6 à droite ne permet pas de déterminer précisément les propriétés de la lentille : nous pouvons juste remarquer que la position de cette tache n'est pas en contradiction avec les deux différentes estimations.

C'est pourquoi nous considérons dans cette section 6.4.2 la même lentille concave que nous avons définie dans la section 6.1.3 mais éclairée par un champ électromagnétique de fréquence différente. La valeur numérique de la fréquence ω est

$$2\pi/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) = 2.5. \quad (6.53)$$

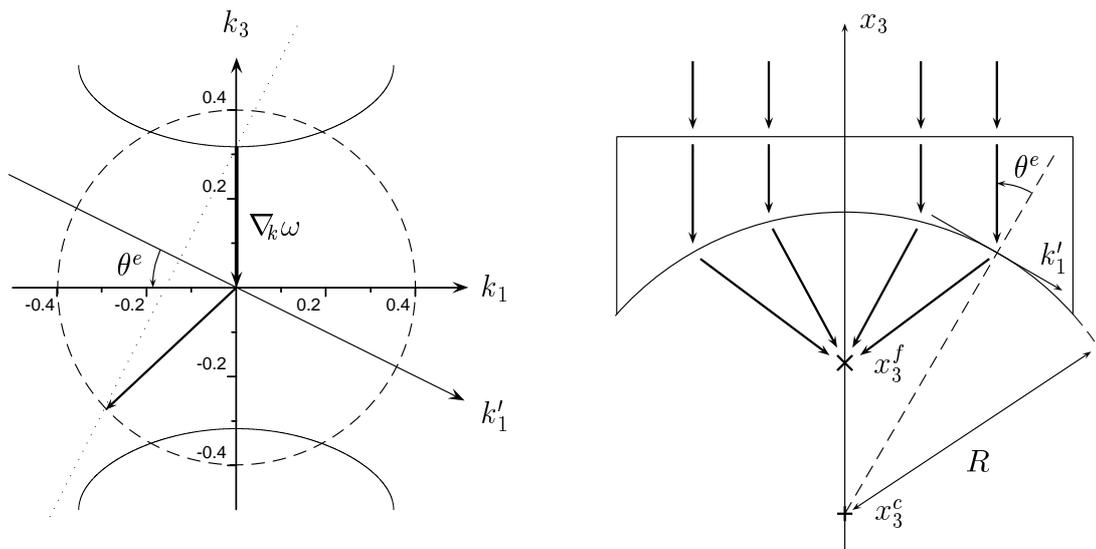


FIG. 6.12: Estimation théorique des propriétés de la lentille. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal avec une ligne continue et la relation de dispersion dans le milieu homogène extérieur avec une ligne discontinue. Nous avons déterminé la vitesse de groupe $\nabla_k \omega$ de même que sur la figure 6.3. Nous représenté schématiquement sur la figure de droite la trajectoire des petits faisceaux (qui constituent le grand faisceau) en présence de la lentille.

Estimation théorique des propriétés de la lentille Nous estimons les valeurs \tilde{x}_3^f et x_3^f de l'altitude à laquelle l'énergie transmise par la lentille devrait se focaliser à partir de l'interprétation proposée dans [80] puis à partir de la propriété 6.2.

De même que dans la section 6.1.3, nous pouvons lire sur la figure 6.12 à gauche la vitesse de phase à l'intérieur du cristal et en déduire la constante diélectrique "effective locale" du cristal.

$$\forall (k_1^i/\omega) \in K_A : \varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0 = [2\pi/(h_3\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})]^2 (k_1^2 + k_3^2) \approx (0.793)^2. \quad (6.54)$$

Alors, si nous utilisons l'approximation des petits angles, l'altitude \tilde{x}_3^f à laquelle l'énergie transmise par la lentille devrait se focaliser est

$$x_3^c - \tilde{x}_3^f = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}}{1 - \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}} R \approx 3.83 R. \quad (6.55)$$

Nous estimons maintenant cette altitude à partir de la propriété 6.2. Nous reproduisons un raisonnement analogue à celui utilisé en optique géométrique. Nous décomposons le grand faisceau incident en une collection de petits faisceaux dont la largeur est petite devant le rayon R de l'interface cylindrique (figure 6.12 à droite) : ces petits faisceaux constituent les "rayons de l'optique géométrique". Nous considérons maintenant un unique petit faisceau. Nous approchons l'interface cylindrique par le plan qui lui est tangent au point d'impact du petit faisceau (figure 6.12 à droite) puis nous utilisons la propriété 6.1. Nous pouvons alors estimer la trajectoire

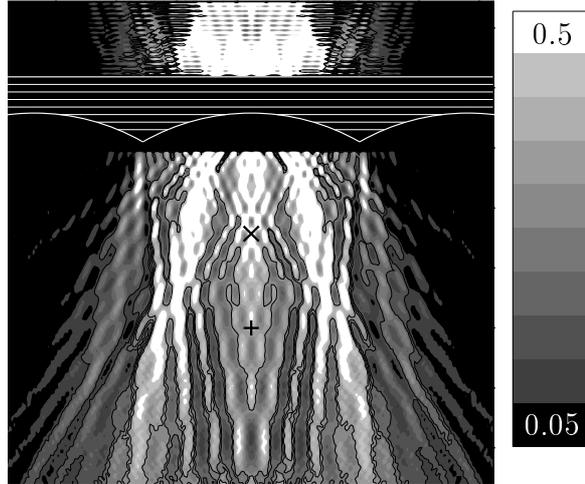


FIG. 6.13: Mise en évidence numérique d'une lentille de distance focale inférieure au rayon R . Nous avons représenté le carré du module de la fonction $E_{\omega,2}$ à l'extérieur de la structure "tas de bois". L'échelle de gris est linéaire : la valeur 1.0 correspond à la valeur maximale du carré du module de la fonction $E_{\omega,2}^i$ représentant le champ incident.

du petit faisceau (figure 6.12 à gauche). Alors, si nous utilisons l'approximation des petits angles, l'altitude x_3^f à laquelle l'énergie transmise par la lentille devrait se focaliser est

$$x_3^c - x_3^f = -\frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}}{1 + \sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}} R \approx -0.44 R. \quad (6.56)$$

Nous constatons immédiatement que les deux estimations (6.55) et (6.56) coïncident si nous remplaçons $\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}$ par $-\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}/\varepsilon_0}$ dans (6.55). Nous comprenons alors que les deux interprétations sont différentes car la vitesse de phase dans le cristal ne peut rendre compte du sens de la vitesse de groupe dans le cristal ; la vitesse de phase ne contient pas toutes les informations nécessaires pour décrire les propriétés du cristal photonique.

Mise en évidence numérique d'une lentille de distance focale inférieure au rayon R Nous avons représenté sur la figure 6.13 le champ électromagnétique en présence de la lentille concave. Nous constatons qu'une partie de l'énergie transmise se focalise à proximité du centre $(0, x_3^f)$ représenté par le symbole \times (le centre $(0, x_3^c)$ du cercle de rayon R étant représenté par le symbole $+$) : cet exemple numérique confirme la propriété 6.2.

Nous avons mis en évidence sur la figure 6.13 un exemple de lentille dont la distance focale est inférieure à celle du rayon R . L'estimation (6.56) nous indique que ce phénomène serait observé s'il existait des milieux homogènes d'indice optique négatif. L'intérêt de cette lentille est que sa distance focale est très petite ; d'après

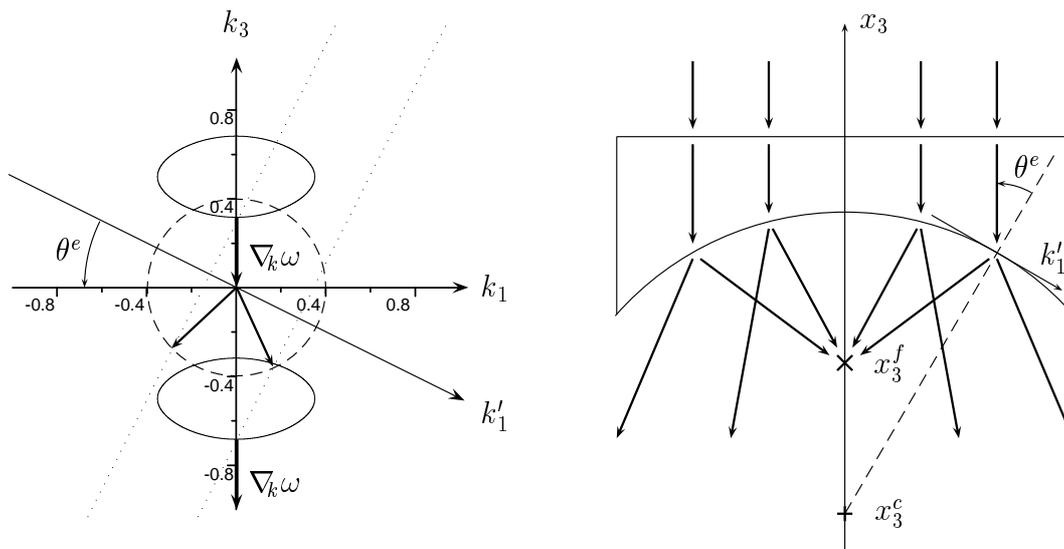


FIG. 6.14: Justification de la présence des rayons supplémentaires. La figure de gauche est la figure 6.12 de gauche représentée avec une échelle deux fois plus petite. Nous représenté schématiquement sur la figure de droite la trajectoire des petits faisceaux (qui constituent le grand faisceau) en présence de la lentille.

(6.56,6.53,6.25) la distance focale de cette lentille est

$$R + (x_3^c - x_3^f) \approx R - 0.44 R = 0.56R \approx 13.44[2\pi h_3/(\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0})], \quad (6.57)$$

soit environ 13.44 longueurs d'onde.

Enfin, nous remarquons sur la figure 6.13 qu'une partie non négligeable de l'énergie transmise s'échappe dans des rayons de chaque côté du foyer de la lentille. Nous pouvons également observer ce phénomène sur la figure 6.6 à droite. La figure 6.7 nous indique que ce phénomène n'a pas lieu dans le cas d'une lentille homogène.

Nous justifions ce phénomène de la façon suivante. Quand nous approchons la surface cylindrique de la lentille par le plan tangent, nous obtenons localement un réseau monodimensionnel (section 6.2). Pour les petites angles, le pas de ce réseau est très grand: le champ transmis par la lentille possède alors nécessairement plusieurs composantes de Fourier associées à des ondes planes propagatives (figure 6.14). Nous pensons que l'existence de ces ondes planes propagatives explique la présence des rayons de chaque côté du foyer; nous avons représenté ce phénomène sur la figure 6.14. Enfin, l'absence de ces rayons dans le cas d'une lentille remplie d'un matériau homogène confirme notre justification.

6.5 Conclusion

Nous avons étudié numériquement les propriétés de diffraction des cristaux photoniques dans le domaine de l'optique; les dimensions du cristal sont très grandes

devant la longueur d'onde du champ électromagnétique. La méthode généralement utilisée pour déterminer la trajectoire du champ électromagnétique dans le domaine de l'optique consiste à minimiser le chemin optique. Le chemin optique est défini à partir de la vitesse de phase ou, de façon équivalente, à partir de l'indice optique.

C'est pourquoi la première méthode utilisée pour estimer les propriétés de diffraction des cristaux photoniques consiste à interpréter la vitesse de phase à l'intérieur du cristal comme l'inverse de l'indice "effectif" multiplié par la constante de proportionnalité $\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ [80]. Seulement, cette interprétation ne peut rendre compte de la complexité de la relation de dispersion : nous avons en particulier montré que la notion d'indice "effectif" ne permet pas de décrire le phénomène de réfraction négative mis en évidence dans la section 6.4.2. Enfin, de la même façon, la notion d'indice "effectif" ne permet pas de décrire les phénomènes que nous avons mis en évidence numériquement dans les sections 6.1.2 et 6.3. En effet, la notion d'indice "effectif" suppose que la relation de dispersion peut être "contenue" dans une matrice 3×3 : cette hypothèse implique que la notion d'indice "effectif" ne contient pas toutes les informations contenues dans la relation de dispersion en raison du caractère "anisotrope" trop important (nous hésitons à employer le terme "anisotrope").

L'exemple numérique des sections 6.1.1 et 6.1.3 constitue un cas particulier où la relation de dispersion est proche de celle d'un milieu homogène anisotrope ; la notion d'indice "effectif" est valable dans ce cas.

Finalement, nous retiendrons que, dans le cas général, la notion d'indice "effectif" ne permet pas de rendre compte des propriétés de diffraction des cristaux photoniques.

La deuxième méthode utilisée pour estimer les propriétés de diffraction des cristaux photoniques consiste à interpréter la vitesse de groupe à l'intérieur du cristal comme la direction de propagation du champ électromagnétique à l'intérieur du cristal [44]. Nous avons donné dans ce chapitre 6 des arguments qui permettent de justifier le couplage entre le champ électromagnétique à l'extérieur et à l'intérieur du cristal au niveau des interfaces qui séparent le cristal du milieu extérieur. La combinaison des résultats du chapitre 2 (où nous avons étudié la trajectoire du champ électromagnétique à l'intérieur du cristal) et des propriétés 6.1 et 6.2 (où nous avons rassemblé nos résultats sur l'influence des interfaces séparant le cristal du milieu extérieur) nous ont permis d'estimer systématiquement les propriétés de diffraction des cristaux photoniques.

Enfin, les règles que nous avons établies nous ont permis de prévoir puis de mettre en évidence numériquement des phénomènes de réfraction inhabituels. Nous avons présenté des phénomènes qui seraient observés s'il existait des milieux homogènes d'indice optique inférieur à celui du vide ou négatif.

Chapitre 7

Etude numérique des propriétés des cristaux photoniques “tas de bois”

Dans ce chapitre 7, nous utilisons notre code numérique dans le cas des structures pour lesquelles il est spécialement adapté ; nous étudions les cristaux photoniques “tas de bois”. Nous étudions en particulier la structure réalisée expérimentalement par S. Lin *et al.* [11, 12] ; cette structure possède un large *gap* dans le domaine des longueurs d’onde utilisées dans les télécommunications.

Nous décrivons le cristal photonique dans la section 7.1.

Dans la section 7.2, nous déterminons la relation de dispersion du cristal photonique dans les deux cas où le contraste d’indice est de 3.6 et de 2.4 : le contraste d’indice de 3.6 vise à modéliser un cristal constitué de tiges de silicium entourées d’air, et le contraste d’indice de 2.4 vise à modéliser un cristal constitué de tiges de silicium entourées de SiO_2 . De même que dans [11, 12, 42], nous montrons que ces cristaux photoniques présentent un *gap* ; nous déterminons avec précision les bords de ces *gaps* et nous estimons l’erreur que nous commettons.

Dans la section 7.3, nous étudions la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise (ou transmission) à travers un cristal photonique “tas de bois”. En particulier, nous mettons en évidence l’effet d’un *gap* de transmission à travers ce cristal photonique.

Nous simulons numériquement le phénomène de l’émission spontanée dans la section 7.4. Nous commençons par examiner la possibilité d’inhiber l’émission spontanée dans un cristal photonique monodimensionnel capable de réfléchir la totalité du rayonnement électromagnétique quelle que soit la direction incidente [83] ; nous montrons qu’un cristal photonique monodimensionnel de taille finie ne peut inhiber l’émission spontanée. Enfin, nous simulons numériquement l’inhibition de l’émission spontanée dans un cristal photonique “tas de bois”. En particulier, nous déterminons dans quelle mesure un cristal photonique “tas de bois” de taille finie peut permettre d’inhiber l’émission spontanée.

7.1 Description du cristal photonique étudié

Le cristal photonique “tas de bois” réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* est un empilement de couches lamellaires constituées de tiges de silicium entourées d’air. Nous considérons dans ce chapitre 7 que les couches lamellaires sont constituées de tiges homogènes de constante diélectrique ε^t entourées d’un milieu homogène de constante diélectrique ε^h , et que l’ensemble des matériaux possèdent les mêmes propriétés magnétiques que le vide.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \mu(x) = \mu_0. \quad (7.1)$$

La disposition et les dimensions des tiges homogènes sont choisies telles que le réseau associé au cristal soit de type cubique faces centrées (figure 7.1); nous exprimons l’ensemble des longueurs à partir de la longueur a de l’arête du cube que constitue la maille conventionnelle du réseau.

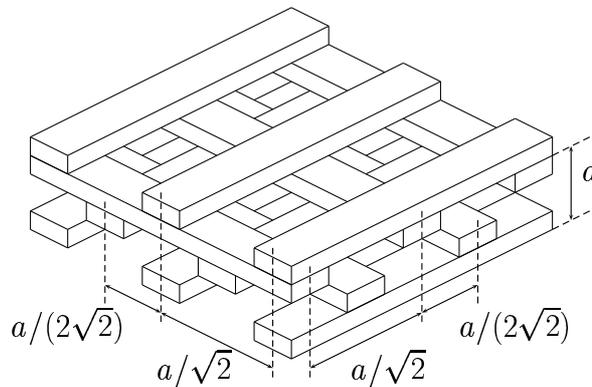


FIG. 7.1: Exemple de cristal photonique “tas de bois” constitué de 5 couches lamellaires.

Dans ce chapitre 7, nous étudions les propriétés du cristal périodique et du cristal d’épaisseur finie. Nous décrivons la couche élémentaire du cristal, nous définissons le cristal périodique, nous définissons le cristal d’épaisseur finie et enfin nous décrivons les symétries du cristal.

7.1.1 Description de la couche élémentaire du cristal photonique

La structure “tas de bois” que nous définissons dans cette section 7.1.1 constitue la couche élémentaire du cristal photonique.

La couche élémentaire est constituée de deux couches lamellaires (figure 7.1). Nous choisissons le repère orthonormé (3.1) tel que les axes des tiges de la première couche soient dirigés suivant la direction e_2 et ceux de la deuxième couche suivant la direction e_1 .

$$L = 2, \quad s(1) = 1 \quad \text{et} \quad s(2) = 2. \quad (7.2)$$

La deuxième couche lamellaire est identique à la première couche lamellaire si nous appliquons à cette dernière une rotation de $\pi/2$ autour de l'axe vertical (figure 7.1). Les deux couches lamellaires sont constituées de

$$M_1 = M_2 = 2 \quad (7.3)$$

tiges d'épaisseur

$$h_{3,1} = h_{3,2} = a/4, \quad (7.4)$$

et de largeur

$$w_{1,1} = w_{2,1} = 0.28h_1, \quad w_{1,2} = w_{2,2} = 0.72h_1 \quad \text{avec} \quad h_1 = h_2 = a/\sqrt{2}. \quad (7.5)$$

Les constantes diélectriques des tiges sont

$$\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{2,1} = \varepsilon^t \quad \text{et} \quad \varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,2} = \varepsilon^h. \quad (7.6)$$

Enfin, les composantes de la troisième translation élémentaire d_3 sont

$$d_{3,1} = d_{3,2} = h_1/2 = h_2/2 = a/(2\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad d_{3,3} = h_3 = h_{3,1} + h_{3,2} = a/2. \quad (7.7)$$

Les trois vecteurs $d_1 = h_1 e_1$, $d_2 = h_2 e_2$ et $d_3 = d_{3,1} e_1 + d_{3,2} e_2 + h_3 e_3$ définissent une maille élémentaire V du cristal photonique (1.1). Cette maille élémentaire n'est pas celle qui est généralement utilisée pour engendrer un cristal de type cubique faces centrées. C'est pourquoi nous définissons le cube que constitue la maille conventionnelle du cristal puis nous définissons la maille élémentaire qui est généralement utilisée pour engendrer un cristal de type cubique faces centrées.

La maille conventionnelle du cristal de type cubique faces centrées Soient a_1 , a_2 et a_3 les trois vecteurs de longueur a et orthogonaux deux à deux qui définissent le cube que constitue la maille conventionnelle du cristal. D'après (7.5,7.7),

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1 + d_2 = (a/\sqrt{2})(e_1 + e_2), \\ a_2 &= d_2 - d_1 = (a/\sqrt{2})(e_2 - e_1), \\ a_3 &= 2d_3 - d_1 - d_2 = a e_3. \end{aligned} \quad (7.8)$$

La maille élémentaire usuelle du cristal de type cubique faces centrées Soient \tilde{d}_1 , \tilde{d}_2 et \tilde{d}_3 les trois vecteurs qui définissent la maille élémentaire usuelle du cristal de type cubique faces centrées.

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1 &= (1/2)(a_2 + a_3) = d_3 - d_1, \\ \tilde{d}_2 &= (1/2)(a_1 + a_3) = d_3, \\ \tilde{d}_3 &= (1/2)(a_1 + a_2) = d_2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Les trois translations associées aux vecteurs \tilde{d}_1 , \tilde{d}_2 et \tilde{d}_3 laissent donc invariant le cristal et le volume engendré par ces trois vecteurs est égal au volume de la maille élémentaire V ; d'après (7.9),

$$(\tilde{d}_1 \times \tilde{d}_2) \cdot \tilde{d}_3 = (-d_1 \times d_3) \cdot d_2 = (d_1 \times d_2) \cdot d_3. \quad (7.10)$$

7.1.2 Définition du cristal photonique périodique

Le cristal photonique périodique est périodique dans les trois directions de l'espace. En plus de (5.4), la fonction ε vérifie

$$\forall x \in \mathcal{C}, \forall n_3 \in \mathbb{Z} : \varepsilon(x + n_3 d_3) = \varepsilon(x), \quad (7.11)$$

où \mathcal{C} est la couche élémentaire du cristal photonique (5.92).

7.1.3 Définition du cristal photonique d'épaisseur finie

Le cristal photonique d'épaisseur finie est un empilement de n couches élémentaires entre un superstrat et un substrat homogènes. La fonction ε vérifie à l'intérieur du cristal

$$\forall x \in \mathcal{C}, \forall n_3 \in \{0, \dots, n-1\} : \varepsilon(x - n_3 d_3) = \varepsilon(x), \quad (7.12)$$

et à l'extérieur du cristal

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x) = \varepsilon^u \quad \forall x_3 \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = \varepsilon^d \quad \forall x_3 \leq -nh_3. \quad (7.13)$$

7.1.4 Les symétries du cristal photonique

Déterminer la relation de dispersion $\omega(k)$ nécessite de parcourir l'ensemble de la maille élémentaire du réseau réciproque V^* (1.38). Nous réduisons ce volume V^* en utilisant les conséquences des symétries du cristal photonique périodique [14, chapitre 3].

Le cristal photonique périodique est invariant si nous lui appliquons trois symétries.

Première symétrie Le cristal est invariant si nous réalisons la réflexion par rapport au plan d'équation $x_1 = w_{1,1}/2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon(w_{1,1} - x_1, x_2, x_3). \quad (7.14)$$

Alors, la relation de dispersion vérifie

$$\forall k \in V^* : \omega(k_1, k_2, k_3) = \omega(-k_1, k_2, k_3). \quad (7.15)$$

Deuxième symétrie Le cristal est invariant si nous réalisons la réflexion par rapport au plan d'équation $x_2 = w_{2,1}/2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon(x_1, w_{2,1} - x_2, x_3). \quad (7.16)$$

Alors, la relation de dispersion vérifie

$$\forall k \in V^* : \omega(k_1, k_2, k_3) = \omega(k_1, -k_2, k_3). \quad (7.17)$$

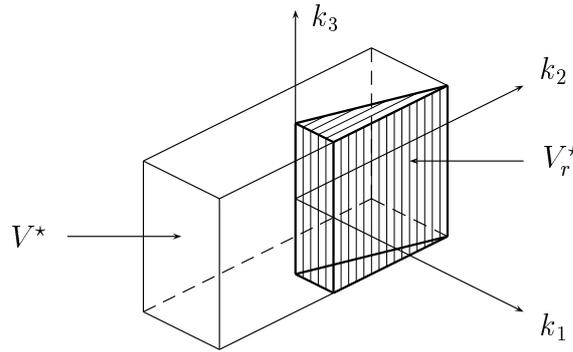


FIG. 7.2: La maille réduite du réseau réciproque.

Troisième symétrie Le cristal est invariant si nous réalisons successivement les deux réflexions par rapport aux plans d'équation $x_2 = x_1$ et $x_3 = -a/4$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon(x_2, x_1, -a/2 - x_3). \quad (7.18)$$

Alors, la relation de dispersion vérifie

$$\forall k \in V^* : \omega(k_1, k_2, k_3) = \omega(k_2, k_1, -k_3). \quad (7.19)$$

Conclusion D'après les relations (7.15,7.17,7.19), nous pouvons déduire l'ensemble de la relation de dispersion $\{\omega(k) \mid k \in V^*\}$ de la relation de dispersion réduite

$$\{\omega(k) \mid k \in V_r^*\}, \quad (7.20)$$

où

$$V_r^* = \{k = k_1 d_1^* + k_2 d_2^* + k_3 d_3^* \in \mathbb{R}^3 \mid k_1 \in [0, 1/2], k_2 \in [0, k_1], k_3 \in [-1/2, 1/2]\}. \quad (7.21)$$

Nous appelons le volume V_r^* la maille réduite du réseau réciproque (figure 7.2).

7.2 Etude numérique de la relation de dispersion

Nous considérons dans cette section 7.2 le cristal photonique périodique que nous avons défini dans la section 7.1.2. Nous déterminons la relation de dispersion dans le cristal photonique dans le cas où les tiges de silicium sont entourées d'air puis dans le cas où elles sont entourées de SiO_2 .

Nous commençons par présenter la représentation de la relation de dispersion que nous utilisons.

7.2.1 Représentation de la relation de dispersion

Nous utilisons la représentation de la relation de dispersion présentée dans [67]; cette représentation consiste à projeter la maille élémentaire du réseau réciproque associée au cristal sur la maille élémentaire du réseau réciproque associée au réseau bidimensionnel que constitue la couche élémentaire \mathcal{C} .

Projection de la relation de dispersion La méthode réseau que nous utilisons nous permet d'obtenir les valeurs propres de la matrice $\tilde{T} = \tilde{T}(\omega, k_1, k_2)$. D'après (5.100), les valeurs propres de la matrice \tilde{T} permettent de déterminer la relation de dispersion $k_3(k_1, k_2, \omega)$. Le parcours de la maille réduite V_r^* du réseau réciproque se réduit donc au parcours de la surface

$$V_{12,r}^* = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \in [0, 1/2], k_2 \in [0, k_1]\}. \quad (7.22)$$

Dans cette section 7.2, nous nous contentons de repérer l'existence ou non de solution propagatives. Nous définissons la fonction \tilde{g} à partir des valeurs propres de la matrice \tilde{T} :

$$\tilde{g} = \min \{ |\ln |\tilde{\lambda}| | \mid \tilde{\lambda} \text{ est une valeur propre de la matrice } \tilde{T} \}. \quad (7.23)$$

D'après cette définition, la fonction \tilde{g} prend la valeur zéro si, et seulement si, la matrice \tilde{T} possède au moins une valeur propre de module égal à 1. Alors, d'après (5.100),

$$\tilde{g}(\omega, k_1, k_2) = 0 \iff \exists k_3(k_1, k_2, \omega) \in [-1/2, 1/2]. \quad (7.24)$$

La fonction \tilde{g} permet donc de repérer la projection de la relation de dispersion.

Conclusion A ce stade, déterminer la relation de dispersion nécessite de parcourir l'ensemble de la surface $V_{12,r}^*$ (7.22). Le parcours systématique de cette surface nécessite un grand nombre de calculs. C'est pourquoi la méthode généralement utilisée

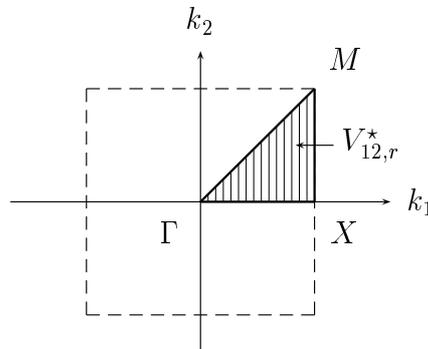


FIG. 7.3: *Projection de la maille réduite du réseau réciproque. Le cadre en ligne discontinue représente la projection de la maille élémentaire du réseau réciproque.*

consiste à parcourir un chemin reliant les sommets de la maille réduite du réseau réciproque.

La représentation de la relation de dispersion que nous utilisons possède l'avantage de simplifier ce chemin : il suffit de parcourir la frontière de la surface $V_{12,r}^*$ (figure 7.3). Nous représenterons donc la relation de dispersion sur le chemin reliant les sommets

$$\Gamma = (0, 0), \quad X = (1/2, 0) \quad \text{et} \quad M = (1/2, 1/2) \quad (7.25)$$

de la surface $V_{12,r}^*$.

7.2.2 La relation de dispersion d'un cristal photonique constitué de tiges de silicium entourées d'air

Données numériques des constantes diélectriques De même que dans [11, 12], nous considérons que le silicium est un matériau d'indice optique proche de 3.6 et que l'air possède les mêmes propriétés que le vide.

$$\varepsilon^t/\varepsilon_0 = (3.6)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon^h = \varepsilon_0. \quad (7.26)$$

Représentation de la relation de dispersion Nous avons représenté sur la figure 7.4 la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée et du couple (k_1, k_2) appartenant au chemin $\Gamma X M \Gamma$: ce diagramme constitué de 300×300 points exige un temps de calcul inférieur à une journée sur une station de travail (soit environ une seconde par calcul) pour

$$(2N_1 + 1) = (2N_2 + 1) = 7. \quad (7.27)$$

Nous considérons qu'il existe des solutions propagatives si la valeur de la fonction \tilde{g} est inférieure à 10^{-8} ; le domaine en blanc correspond à la projection de la relation de dispersion et le domaine en gris correspond au domaine dans lequel il n'existe pas de solutions propagatives dans le cristal.

La figure 7.4 nous indique que le cristal photonique présente un large *gap* pour les valeurs de la fréquence normalisée comprises entre 0.47 et 0.57.

$$\omega a \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} / (2\pi) \in [0.47, 0.57] \implies \textit{gap}. \quad (7.28)$$

Nos résultats confirment ceux présentés dans [11, 42]. Nous appliquons nos résultats au cristal réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* et décrit dans [12]. Ce cristal est proche de notre structure si nous choisissons $a \approx 0.9 \mu m$. Alors, nous obtenons

$$(2\pi) / (\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) \in [1.58 \mu m, 1.91 \mu m] \implies \textit{gap}. \quad (7.29)$$

Enfin, le parcours systématique du chemin $\Gamma X M \Gamma$ pour toutes les fréquences nous permet de repérer les points du réseau réciproque qui correspondent aux bords du *gap* ; d'après la figure 7.4, le bord supérieur du *gap* est atteint en X et le bord inférieur du *gap* est atteint en M . C'est pourquoi nous concentrons maintenant nos calculs sur ces points.

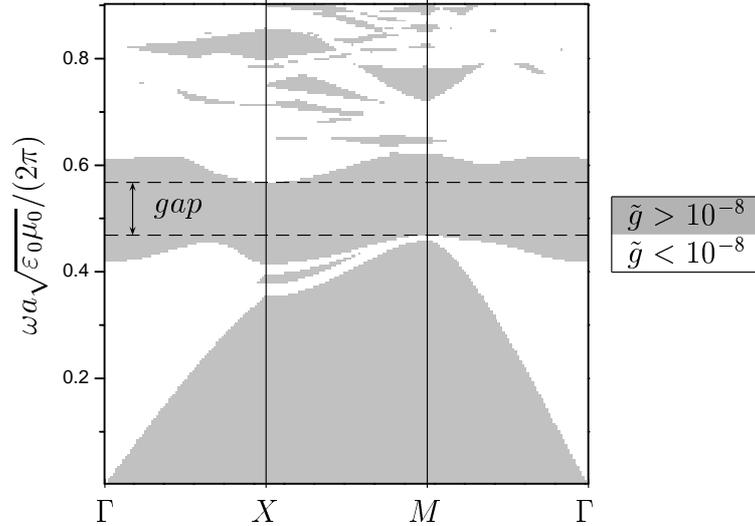


FIG. 7.4: Représentation de la relation de dispersion du cristal photonique “tas de bois” constitué de tiges de silicium entourées d’air. Nous avons représenté la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée et du couple (k_1, k_2) décrivant le chemin $\Gamma XM\Gamma$. Nous avons représenté en blanc le domaine où la fonction \tilde{g} est nulle et en gris le domaine où la fonction \tilde{g} est non-nulle.

Détermination précise des bords du gap Nous avons représenté sur la figure 7.5 à gauche et au centre la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée aux points M et X pour le nombre de vecteurs (7.27). Ces deux courbes nous permettent de déterminer précisément les bords du gap . De même que sur la figure 7.4, nous considérons qu’il existe des solutions propagatives si la fonction \tilde{g} prend une valeur inférieure à 10^{-8} . La figure 7.5 nous indique que cette tolérance de 10^{-8} est bien adaptée: les valeurs de la fonction \tilde{g} sont proches de 1 dans le gap et sont inférieures à 10^{-10} en dehors du gap (nous approchons alors de la précision numérique des machines).

Nous avons complété ces courbes par un test de convergence; nous avons représenté sur la figure 7.5 à droite les bords du gap en fonction du nombre de vecteurs utilisés pour représenter le champ électromagnétique (le nombre de vecteurs total étant le carré du nombre indiqué en abscisse). Ce test de convergence nous assure de la stabilité de nos méthodes numériques et que le nombre de vecteurs (7.27) est suffisant pour obtenir une bonne précision. Enfin, ce test de convergence nous permet d’estimer l’erreur que nous commettons sur la valeur numérique des bords du gap .

$$\omega a \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} / (2\pi) \in [0.468 \pm 0.001, 0.569 \pm 0.001] \implies gap. \quad (7.30)$$

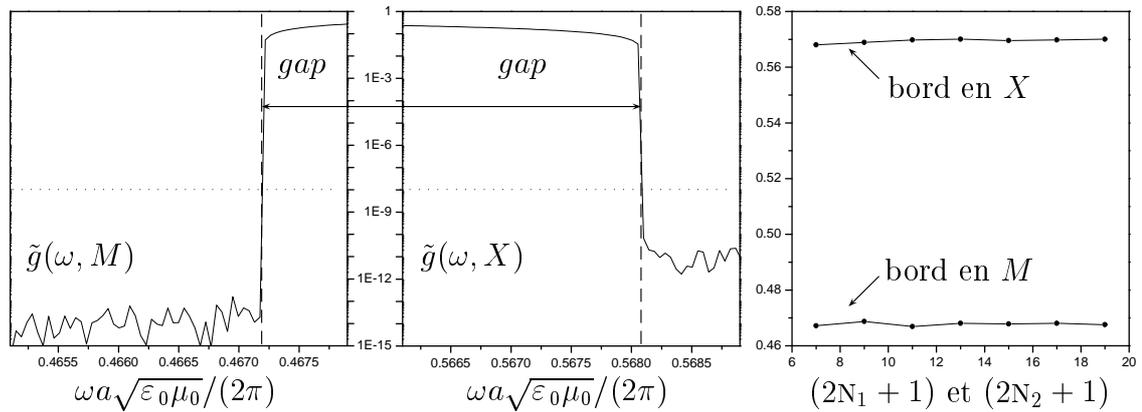


FIG. 7.5: Détermination précise des bords du gap. Nous avons représenté la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée au point M sur la figure de gauche et au point X sur la figure du centre : l'échelle est logarithmique. Nous avons représenté sur la figure de droite l'évolution des bords du gap quand le nombre $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$ de vecteurs utilisés pour représenter le champ électromagnétique augmente : ce nombre $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$ est le carré du nombre indiqué en abscisse.

7.2.3 La relation de dispersion d'un cristal photonique constitué de tiges de silicium entourées de SiO_2

Nous étudions maintenant le même cristal que celui réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* en remplaçant l'air par du SiO_2 . La fabrication de ce cristal photonique requière une étape de moins que celle du cristal photonique de la section 7.2.2 précédente [11, 12].

Données numériques des constantes diélectriques De même que dans [11], nous considérons que le SiO_2 est un matériau d'indice optique proche de 1.5 (nous obtenons alors un contraste d'indice de 2.4 entre le silicium et le SiO_2 [11]).

$$\varepsilon^t/\varepsilon_0 = (3.6)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon^h/\varepsilon_0 = (1.5)^2. \quad (7.31)$$

Représentation de la relation de dispersion Nous avons représenté sur la figure 7.6 la relation de dispersion avec les mêmes conventions que sur la figure 7.4. La figure 7.6 nous indique que le cristal photonique présente un *gap* étroit.

$$\omega a \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} / (2\pi) \in [0.44, 0.46] \implies \text{gap}. \quad (7.32)$$

Les résultats (7.28) et (7.32) confirment la règle qui affirme que la largeur du *gap* augmente si le contraste d'indice augmente. Notre résultat confirme également celui présenté dans [11] : *il existe un gap dans le cristal photonique si le contraste d'indice est égal à 2.4*. Seulement, la largeur du *gap* est relativement faible ; nous estimons qu'une détermination précise des bords du *gap* s'avère indispensable dans ce cas.

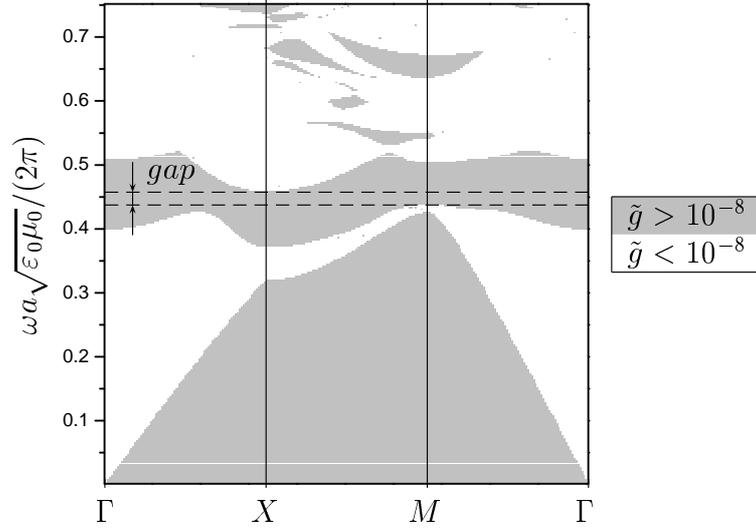


FIG. 7.6: Représentation de la relation de dispersion du cristal photonique “tas de bois” constitué de tiges de silicium entourées de SiO_2 . Nous avons représenté la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée et du couple (k_1, k_2) décrivant le chemin $\Gamma X M \Gamma$. Nous avons représenté en blanc le domaine où la fonction \tilde{g} est nulle et en gris le domaine où la fonction \tilde{g} est non-nulle.

Détermination précise des bords du *gap* Nous avons représenté sur la figure 7.7 à gauche et au centre la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée aux points M et X ; ces deux courbes nous permettent de déterminer précisément les bords du *gap*. De même que dans la section 7.2.2, nous avons complété ces courbes

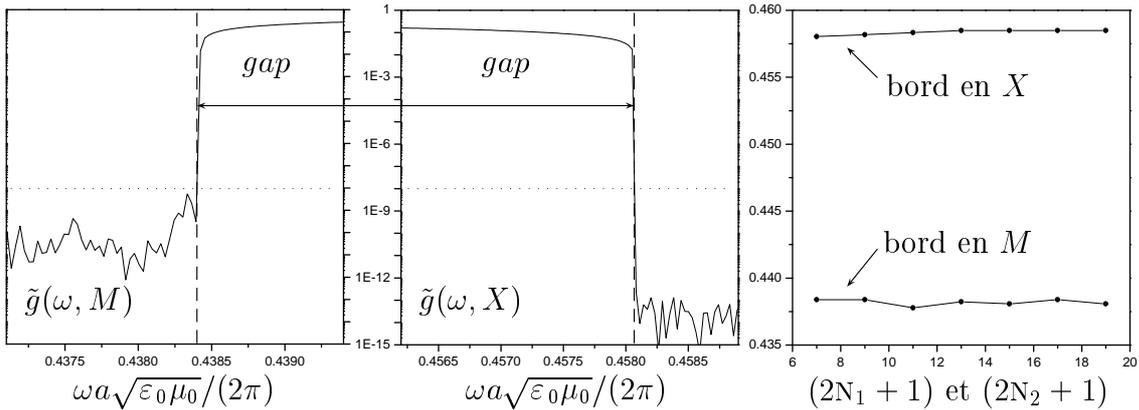


FIG. 7.7: Détermination précise des bords du *gap*. Nous avons représenté la fonction \tilde{g} en fonction de la fréquence normalisée au point M sur la figure de gauche et au point X sur la figure du centre : l’échelle est logarithmique. Nous avons représenté sur la figure de droite l’évolution des bords du *gap* quand le nombre $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$ de vecteurs utilisés pour représenter le champ électromagnétique augmente : ce nombre $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$ est le carré du nombre indiqué en abscisse.

par un test de convergence représenté sur la figure 7.7 à droite ; ce test de convergence nous permet d’estimer l’erreur que nous commettons sur la valeur numérique des bords du *gap*.

$$\omega a \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} / (2\pi) \in [0.438 \pm 0.001, 0.458 \pm 0.001] \implies \text{gap}. \quad (7.33)$$

La détermination précise des bords du *gap* nous assure de l’existence de celui-ci. D’après (7.33), la largeur relative du *gap* se situe entre 4 et 5 pourcents. Notre résultat est légèrement différent de celui énoncé dans [11] : d’après [11], la largeur relative du *gap* se situe autour de 8 pourcents.

7.2.4 Conclusion

Nous avons montré que le cristal photonique “tas de bois” réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* présente un *gap* pour les deux contrastes d’indice de 3.6 et 2.4. Surtout, nos méthodes numériques nous permettent de déterminer avec précision les bords des *gaps*. Nous estimons que cette précision s’avère indispensable dans le cas où la largeur du *gap* est étroite : malgré la précision que nous avons obtenue, l’erreur que nous commettons représente tout de même 10 pourcents de la largeur du *gap* dans le cas du contraste d’indice de 2.4.

La précision que nous obtenons présente un intérêt d’autant plus grand que la largeur du *gap* est faible. En particulier, nos méthodes numériques pourraient présenter un grand intérêt pour déterminer le plus petit contraste d’indice pour lequel il existe un *gap*.

7.3 Etude numérique de la transmission à travers un cristal photonique “tas de bois”

Dans cette section 7.3 nous étudions la transmission à travers le cristal photonique d’épaisseur finie constitué de n couches élémentaires que nous avons défini dans la section 7.1.3.

L’étude de la transmission permet de compléter l’étude de la relation de dispersion que nous avons réalisée dans la section 7.2.2. En particulier, nous déterminons dans quelle mesure un cristal photonique réel, constitué d’un nombre fini de couches élémentaires, peut interdire la propagation du champ électromagnétique pour les fréquences se situant dans un *gap*.

Données numériques du cristal photonique Le contraste d’indice est celui du cristal photonique réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* : les valeurs numériques des constantes diélectriques ε^t et ε^h sont (7.26). Le superstrat et le substrat possèdent les mêmes propriétés que le vide :

$$\varepsilon^u = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^d = \varepsilon_0. \quad (7.34)$$

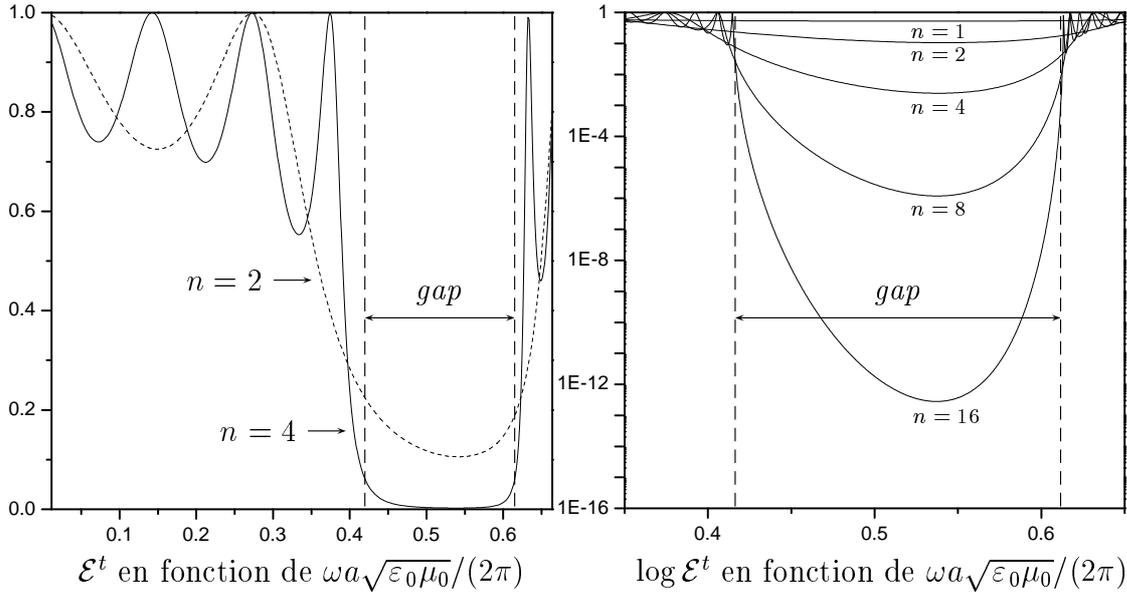


FIG. 7.8: Transmission à travers le cristal photonique. Nous avons représenté la fonction \mathcal{E}^t en fonction de la fréquence normalisée avec une échelle linéaire sur la figure de gauche et avec une échelle logarithmique sur la figure de droite. Le nombre n est le nombre de couches élémentaires qui constituent le cristal.

Données numériques du champ électromagnétique Les valeurs numériques des trois angles θ^i , ϕ^i et δ^i qui définissent l'onde plane incidente (5.74) sont

$$\theta^i = 0, \quad \phi^i = 0 \quad \text{et} \quad \delta^i = \pi/2. \quad (7.35)$$

La valeur numérique des deux angles θ^i et ϕ^i correspond au point Γ sur la surface $V_{12,r}^*$. Enfin, le nombre de vecteurs utilisés pour représenter le champ électromagnétique est suffisamment grand pour que l'erreur (5.88) sur les efficacités diffractées soit toujours inférieure à 0.005.

$$(2N_1 + 1) = (2N_2 + 1) = 5 \implies \epsilon \leq 0.005. \quad (7.36)$$

Enfin, ce nombre (7.36) de vecteurs implique que chaque calcul nécessite environ 0.1 seconde sur une station de travail.

Transmission à travers un cristal photonique "tas de bois" Nous avons représenté sur la figure 7.8 la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise (ou somme des efficacités transmises (5.80) ou transmission)

$$\mathcal{E}^t = \sum_{(n_1, n_2) \in \tilde{N}^d} \mathcal{E}_{n_1, n_2}^t \quad (7.37)$$

en fonction de la fréquence normalisée. Avec le nombre (7.36) de vecteurs utilisés, chaque point de la courbe nécessite environ 6 minutes de calcul sur une station de travail.

La figure 7.8 de gauche nous indique que le nombre d’oscillations de la transmission dans la gamme des fréquences s’étendant depuis la fréquence nulle jusqu’au *gap* est égal au nombre de couches élémentaires qui constituent le cristal. Ce phénomène est identique à celui rencontré dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels. Dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels, une justification théorique et une interprétation physique de ce phénomène sont présentées dans [60]. La figure 7.8 de gauche nous indique que l’interprétation physique présentée dans [60] est vraisemblablement encore valable dans le cas des cristaux photoniques bi et tridimensionnels ; cette interprétation permet en particulier de prévoir les propriétés des structures de type Fabry-Perot en cristal photonique.

La figure 7.8 de droite nous indique l’évolution de la transmission en fonction du nombre de couches élémentaires dans un *gap* ; la transmission tend de façon exponentielle vers 0 quand le nombre de couches élémentaires tend vers l’infini. Ce phénomène est également identique à celui rencontré dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels (4.9).

Conclusion Nous avons montré que la transmission à travers un cristal photonique tridimensionnel “tas de bois” est qualitativement semblable à la transmission à travers un cristal photonique monodimensionnel dans la gamme des fréquences s’étendant depuis la fréquence nulle jusqu’au premier *gap* inclus. Cette propriété nous indique que de nombreuses interprétations physiques établies dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels sont vraisemblablement encore valables dans le cas des cristaux photoniques bi et tridimensionnels.

Nous avons également montré numériquement que la transmission par un cristal photonique “tas de bois” tend de façon exponentielle vers 0 quand le nombre de couches élémentaires augmente [11, 42]. Ce phénomène indique qu’un empilement d’un petit nombre de couches élémentaires peut posséder des propriétés très proches de celles d’un cristal photonique “idéal” dans les gammes de fréquences correspondant aux *gaps* (nous entendons par cristal photonique “idéal” un cristal qui réfléchit la totalité du rayonnement électromagnétique).

7.4 Simulation numérique de l’inhibition de l’émission spontanée

Dans cette section 7.4, nous simulons le phénomène de l’inhibition de l’émission spontanée en plaçant une source optique à l’intérieur d’un cristal photonique.

De même que dans [84], nous modélisons l’émission spontanée par le rayonnement d’un dipôle. Nous étudions le rayonnement de ce dipôle situé à l’intérieur d’un cristal photonique monodimensionnel puis à l’intérieur d’un cristal photonique “tas de bois” d’épaisseur finie que nous avons défini dans la section 7.1.3.

7.4.1 Modélisation numérique de l'émission spontanée : le rayonnement du dipôle

Dans le chapitre 2, nous avons modélisé le phénomène de l'émission spontanée par un système quantique. Seulement, notre code numérique résout les équations de Maxwell harmoniques classiques (4). Nous commençons donc par justifier au mieux notre modélisation numérique du phénomène de l'émission spontanée : nous modélisons ce phénomène par le rayonnement d'un dipôle. Nous définissons ensuite la grandeur physique que nous représentons : le flux du vecteur de Poynting par unité d'angle solide. Enfin, nous représentons le rayonnement d'un dipôle dans le vide qui nous servira d'exemple de référence.

Modélisation numérique de l'émission spontanée Dans le chapitre 2, nous avons modélisé le phénomène de l'émission spontanée par un système constitué d'un atome et du champ électromagnétique. Dans ce système, le champ électromagnétique est initialement dans son état fondamental à zéro photon ; nous supposons que le champ électromagnétique harmonique est dans cet état si les champs complexes E_ω et H_ω coïncident avec la fonction nulle. A la fin du processus, si l'atome n'est plus excité, alors le champ électromagnétique est dans un état à un photon ; nous supposons que le champ électromagnétique est dans cet état si les champs complexes E_ω et H_ω sont différents de la fonction nulle. Alors, l'atome constitue la source du rayonnement électromagnétique classique.

Nous supposons que l'atome alimenté en énergie se comporte comme un dipôle en régime harmonique forcé de fréquence ω : l'électron de l'atome constitue la charge négative et le noyau constitue la charge positive. Soit P la "densité de dipôle". Les dimensions de ce dipôle, de l'ordre de celles de l'atome, sont très petites devant les dimensions du cristal photonique. Alors, de même que dans [84], nous considérons que le dipôle est ponctuel. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t, x) = P_\omega(x) \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad P_\omega(x) = P_0 \delta(x - x_0), \quad (7.38)$$

où δ est la "fonction" de Dirac, P_0 est l'orientation du dipôle et x_0 est la position du dipôle à l'intérieur du cristal :

$$P_0 \in \mathbb{C}^3 \quad \text{et} \quad x_0 \in \mathbb{R}^3. \quad (7.39)$$

Ce dipôle constitue une source de densité de courant $J = \partial_t P = -i\omega P$. Alors, les équations de Maxwell harmoniques (4) deviennent

$$\nabla \times E_\omega - i\omega\mu H_\omega = 0, \quad \text{et} \quad \nabla \times H_\omega + i\omega\varepsilon E_\omega = -i\omega P_\omega. \quad (7.40)$$

La méthode de résolution numérique de cette équation en présence d'une structure périodique dans deux directions de l'espace et limitée dans la troisième est présentée de façon détaillée dans [84].

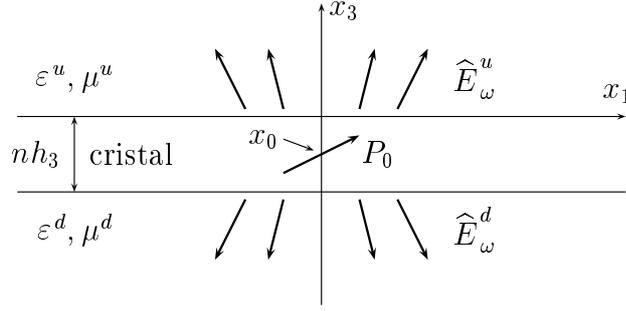


FIG. 7.9: Les conditions aux limites du cristal : la condition d'onde sortante.

Le flux du vecteur de Poynting par unité d'angle solide du champ électromagnétique Après la résolution numérique [84], nous obtenons l'expression de la fonction E_ω dans le superstrat et le substrat. Soient E_ω^u et E_ω^d les fonctions représentant le champ électrique dans le superstrat et le substrat : ces fonctions vérifient l'hypothèse (5.14). Alors, les fonctions $E_\omega^u(\cdot, \cdot, x_3)$ et $E_\omega^d(\cdot, \cdot, x_3)$ possèdent une transformée de Fourier $\widehat{E}_\omega^u(\cdot, \cdot, x_3)$ et $\widehat{E}_\omega^d(\cdot, \cdot, x_3)$. Formellement, pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \geq 0$:

$$\widehat{E}_\omega^u(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} E_\omega^u(x) \exp[-i\omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (7.41)$$

et pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x_3 \leq -nh_3$:

$$\widehat{E}_\omega^d(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} E_\omega^d(x) \exp[-i\omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (7.42)$$

Nous réalisons la transformée de Fourier des équations de Maxwell harmoniques (7.40). Les transformées de Fourier $\widehat{E}_\omega^u(\cdot, \cdot, x_3)$ et $\widehat{E}_\omega^d(\cdot, \cdot, x_3)$ vérifient

$$\begin{aligned} [\partial_3^2 + (\omega\alpha_3^u)^2] \widehat{E}_\omega^u &= 0 \quad \forall x_3 \geq 0, \\ [\partial_3^2 + (\omega\alpha_3^d)^2] \widehat{E}_\omega^d &= 0 \quad \forall x_3 \leq -nh_3, \end{aligned} \quad (7.43)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_3^u &= \sqrt{\varepsilon^u \mu^u - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \quad \text{avec} \quad \arg(\alpha_3^u) \in \{0, \pi/2\}, \\ \alpha_3^d &= \sqrt{\varepsilon^d \mu^d - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \quad \text{avec} \quad \arg(\alpha_3^d) \in \{0, \pi/2\}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

La solution générale de l'équation (7.43) est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles montantes ou descendantes (d'argument $\pm\alpha_3^u x_3$ dans le superstrat et $\pm\alpha_3^d x_3$ dans le substrat). La condition d'onde sortante implique que la fonction \widehat{E}_ω^u est exclusivement constituée d'ondes montantes et que la fonction \widehat{E}_ω^d est exclusivement constituée d'ondes descendantes (figure 7.9). Pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_\omega^u(\alpha_1, \alpha_2, x_3) &= \widehat{E}_\omega^r(\alpha_1, \alpha_2) \exp(i\omega\alpha_3^u x_3) \quad \forall x_3 \geq 0, \\ \widehat{E}_\omega^d(\alpha_1, \alpha_2, x_3) &= \widehat{E}_\omega^t(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i\omega\alpha_3^d x_3) \quad \forall x_3 \leq -nh_3. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Nous utilisons le système de coordonnées sphérique usuel : le couple $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi[$ permet de déterminer une direction et $\sin\theta d\theta d\phi$ constitue l'angle solide infinitésimal. Soient Π_ω^r et Π_ω^t les densités de flux du vecteur de Poynting émis dans le superstrat et dans le substrat par unité d'angle solide à l'infini.

$$\begin{aligned}\Pi_\omega^r &= (1/2)\sqrt{\varepsilon^u/\mu^u} |\widehat{E}_\omega^r|^2 |\Re(\alpha_3^u)|^2, \\ \Pi_\omega^t &= (1/2)\sqrt{\varepsilon^d/\mu^d} |\widehat{E}_\omega^t|^2 |\Re(\alpha_3^u)|^2.\end{aligned}\tag{7.46}$$

Preuve de l'égalité (7.46) La méthode est identique pour déterminer l'expression des densités de flux Π_ω^r et Π_ω^t . Nous donnons une preuve de l'égalité (7.46) pour la densité de flux Π_ω^r . Soient H_ω^u la fonction représentant le champ magnétique dans le superstrat. L'équation (7.40) permet de déduire la fonction H_ω^u de la fonction E_ω^u . Soit Π_ω^u la partie réelle du vecteur de Poynting complexe dans le superstrat.

$$\Pi_\omega^u = \Pi_{\omega,1}^u e_1 + \Pi_{\omega,2}^u e_2 + \Pi_{\omega,3}^u e_3 = (E_\omega^u \times \overline{H}_\omega^u + \overline{E}_\omega^u \times H_\omega^u)/4.\tag{7.47}$$

Soit Φ^u le flux de la partie réelle du vecteur de Poynting à travers l'interface plane horizontale d'équation $x_3 = 0$ séparant la structure "tas de bois" du superstrat. Le vecteur normal à cette interface est le vecteur e_3 . Alors,

$$\Phi^u = \int_{\mathbb{R}^2} \Pi_{\omega,3}^u(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2.\tag{7.48}$$

Nous remplaçons la fonction E_ω^u par son expression (7.41,7.45) et nous exprimons la fonction H_ω^u à partir de la fonction E_ω^u avec la relation (7.40). Alors, d'après l'unitarité de la transformation de Fourier dans l'ensemble des fonctions de carré sommable, l'expression (7.48) devient

$$\Phi^u = 1/(2\mu^u) \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{E}_\omega^r(\alpha_1, \alpha_2)|^2 \Re(\alpha_3^u) d\alpha_1 d\alpha_2.\tag{7.49}$$

Nous réalisons un raisonnement analogue à celui de la section 5.5.3. Les fonctions ε et μ vérifient l'hypothèse (5). Alors, d'après la définition (7.47) de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe Π_ω^u et d'après l'équation (7.40) vérifiée par les fonctions E_ω^u et H_ω^u , la divergence de Π_ω^u est la fonction nulle dans le superstrat : $\nabla \cdot \Pi_\omega^u = 0$ pour tout $x_3 \geq 0$. Nous utilisons le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) usuel. Nous considérons la demi-boule de rayon R incluse dans le superstrat. D'après l'égalité $\nabla \cdot \Pi_\omega^u = 0$, le flux sortant du vecteur Π_ω^u à travers la surface fermée qui délimite la demi-boule de rayon R est nul pour tout $R \in \mathbb{R}$. Alors, d'après (7.48),

$$\Phi^u = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]} \Pi_\omega^u(R, \theta, \phi) \cdot e_R(\theta, \phi) R^2 \sin\theta d\theta d\phi,\tag{7.50}$$

où

$$\forall (\theta, \phi) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] : e_R(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\phi e_1 + \sin\theta \sin\phi e_2 + \cos\theta e_3.\tag{7.51}$$

D'après (7.50), la quantité $\Pi_\omega^u(R, \theta, \phi) \cdot e_R(\theta, \phi) R^2$ est, par définition, la densité de flux du vecteur de Poynting émis dans la direction (θ, ϕ) par unité d'angle solide à travers la demi-sphère de rayon R . L'expression (7.50) nous indique que nous pouvons estimer cette quantité quand le rayon R tend vers l'infini. En effet, d'après l'expression (7.44) du nombre α_3^u , l'intégrale intervenant dans l'expression (7.49) du flux Φ^u porte sur le disque de rayon $\sqrt{\varepsilon^u \mu^u}$. Nous pouvons donc réaliser le changement de variables ($\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon^u \mu^u} \sin \theta \cos \phi$, $\alpha_2 = \sqrt{\varepsilon^u \mu^u} \sin \theta \sin \phi$) en (θ, ϕ) . Alors, l'expression (7.49) devient

$$\Phi^u = 1/(2\mu^u) \int_{[0, \pi/2] \times [0, 2\pi]} |\widehat{E}_\omega^r[\alpha_1(\theta, \phi), \alpha_2(\theta, \phi)]|^2 \Re(\alpha_3^u) \varepsilon^u \mu^u \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi. \quad (7.52)$$

Alors, si nous identifions les deux expressions (7.50) et (7.52), nous obtenons l'expression de Π_ω^r , la densité de flux du vecteur de Poynting émis dans le superstrat par unité d'angle solide à l'infini.

$$(7.50, 7.52) \implies \Pi_\omega^r = \lim_{R \rightarrow \infty} \Pi_\omega^u \cdot e_R R^2 = (\varepsilon^u/2) |\widehat{E}_\omega^r|^2 \Re(\alpha_3^u) \cos \theta. \quad (7.53)$$

Enfin, en utilisant que $\Re(\alpha_3^u) = \sqrt{\varepsilon^u \mu^u} \cos \theta$, nous obtenons l'expression (7.46) de la fonction Π_ω^r .

Exemple de référence : le rayonnement du dipôle dans le vide Nous considérons que le dipôle se trouve dans le vide.

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon(x) = \varepsilon_0. \quad (7.54)$$

Nous avons représenté sur la figure 7.10 le produit de la la fonction Π_ω^r avec le coefficient $2\sqrt{\varepsilon^u/\mu^u}/|P_0|^2$ dans les deux cas $P_0 = e_1$ et $P_0 = e_3$ (la fonction Π_ω^t coïncide avec la fonction Π_ω^r dans ce cas pour des raisons de symétries). Le maximum du produit de la fonction Π_ω^r avec le coefficient de normalisation $2\sqrt{\varepsilon^u/\mu^u}/|P_0|^2$ est égal à 1. Nous utiliserons toujours ce même coefficient de normalisation dans la suite de cette section 7.4 : le dipôle constitue alors une source de courant constante.

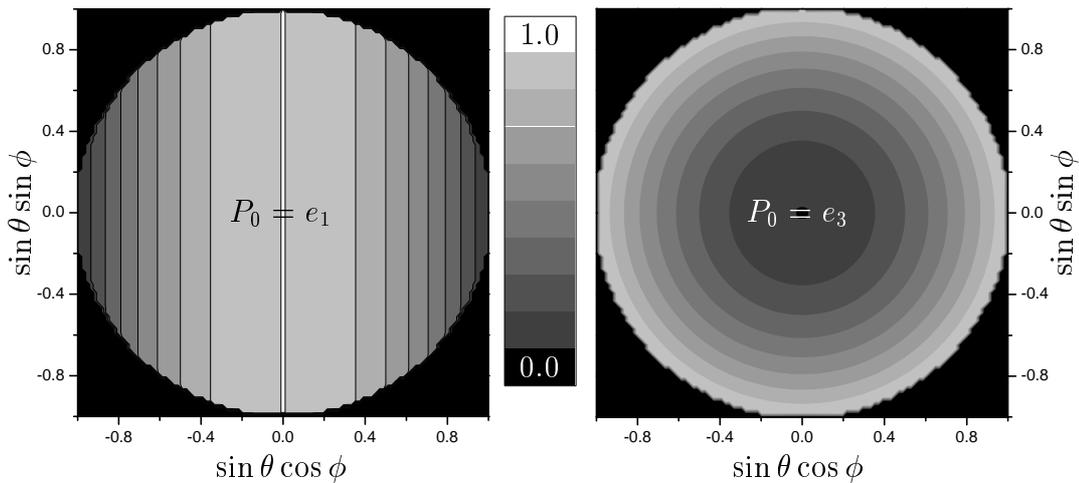


FIG. 7.10: Emission du dipôle dans le vide. Nous avons représenté le produit de la fonction Π_ω^r avec le coefficient $2\sqrt{\varepsilon^u/\mu^u}/|P_0|^2$ dans le cas où $P_0 = e_1$ sur la figure de gauche et dans le cas où $P_0 = e_3$ sur la figure de droite : l'échelle de gris est linéaire.

7.4.2 Inhibition partielle de l'émission spontanée par un cristal photonique monodimensionnel

Dans cette section 7.4.2, nous plaçons le dipôle dans le cristal photonique monodimensionnel décrit dans [83]. Ce cristal photonique est capable de réfléchir la totalité du rayonnement électromagnétique quelle que soit la direction incidente. Nous étudions dans quelle mesure un cube taillé dans ce cristal peut inhiber l'émission spontanée (figure 7.11).

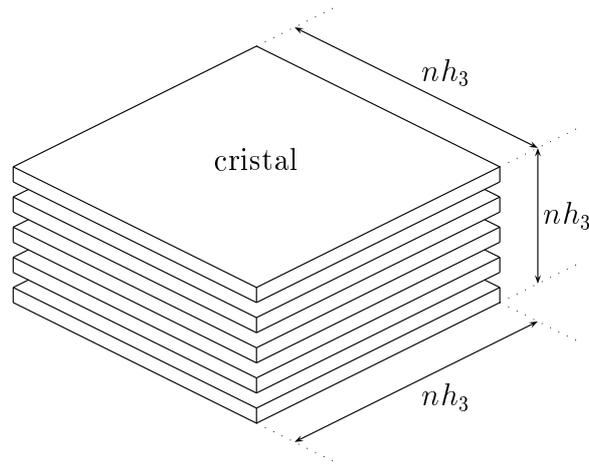


FIG. 7.11: *Un cristal photonique monodimensionnel en forme de cube. La longueur de l'arête du cube est nh_3 si le cristal est constitué de n couches élémentaires d'épaisseur h_3 .*

Notre code numérique ne nous permet pas de décrire fidèlement le cube en cristal photonique ; nous considérons toujours une structure infinie et périodique dans deux directions.

La première structure que nous considérons est un cristal photonique monodimensionnel usuel constitué de n couches élémentaires (figure 7.12 à gauche) : nous pouvons alors estimer le champ électromagnétique rayonné au niveau des deux faces horizontales du cube. La seconde structure que nous considérons est le cristal photonique monodimensionnel séparé du milieu extérieur par des interfaces planes verticales (figure 7.12 à droite) : nous pouvons alors estimer le champ électromagnétique rayonné au niveau des quatre faces verticales du cube.

Données numériques du cristal photonique monodimensionnel séparé du milieu extérieur par des interfaces planes horizontales Nous décrivons la structure que nous avons représentée sur la figure 7.12 à gauche. Nous utilisons les notations que nous avons introduites dans la section 6.2. Le cristal est constitué de $n = 32$ couches élémentaires ; l'équation des interfaces planes qui séparent le cristal du milieu extérieur est

$$x_3 = x'_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = x'_3 = -nh_3 \quad \text{avec} \quad n = 32. \quad (7.55)$$

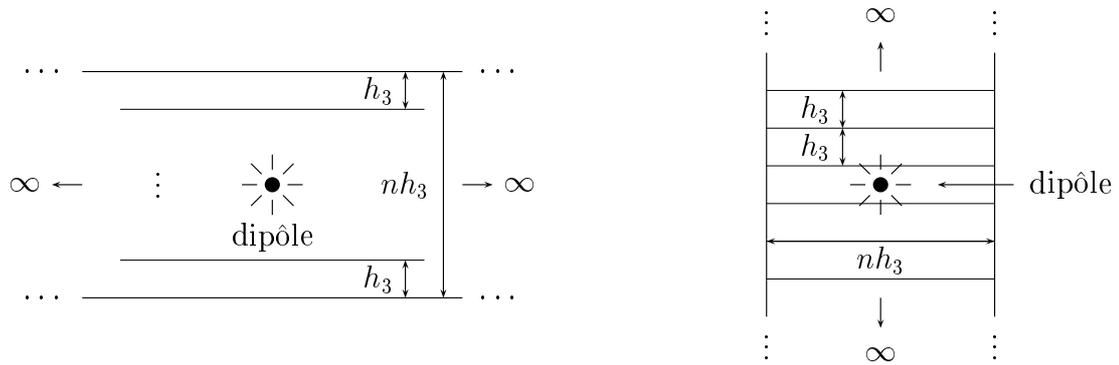


FIG. 7.12: Modélisation du cristal photonique monodimensionnel en forme de cube dont la longueur de l'arête du cube est nh_3 . Nous avons représenté à gauche la structure permettant d'estimer le champ électromagnétique rayonné au niveau des deux faces horizontales et à droite celle permettant d'estimer le champ électromagnétique rayonné au niveau des quatre faces verticales.

Ce nombre de couches élémentaire est suffisamment grand pour réfléchir la totalité champ électromagnétique dans la gamme de fréquences situées dans *gap*. Nous plaçons le dipôle au centre du cristal.

$$x_0 = -(n/2)h_3e_3. \quad (7.56)$$

Le superstrat et le substrat possèdent les mêmes propriétés que le vide :

$$\varepsilon^u = \varepsilon^d = \varepsilon_0 \quad (7.57)$$

La couche élémentaire du cristal décrit dans [83] est constituée de deux strates homogènes : la première strate est constituée de SiO_2 et la deuxième strate est constituée de silicium. De même que dans [83], les valeurs numériques des constantes diélectriques ε_1 et ε_2 des deux strates homogènes sont

$$\varepsilon_1/\varepsilon_0 = (1.4)^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2/\varepsilon_0 = (3.4)^2. \quad (7.58)$$

La valeur numérique de l'épaisseur de la strate de SiO_2 est

$$h = 0.68h_3. \quad (7.59)$$

Nous symétrisons la couche élémentaire. La couche élémentaire est alors constituée de trois strates homogènes ; les première et troisième strates sont identiques. Les première et troisième strates sont d'épaisseur $h/2$ et de constante diélectrique ε_1 . La deuxième strate est d'épaisseur $h_3 - h$ et de constante diélectrique ε_2 .

Enfin, nous choisissons une fréquence qui se trouve dans un *gap* [83]. La valeur numérique de la fréquence normalisée est

$$\omega h_3 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} / (2\pi) = 0.3. \quad (7.60)$$

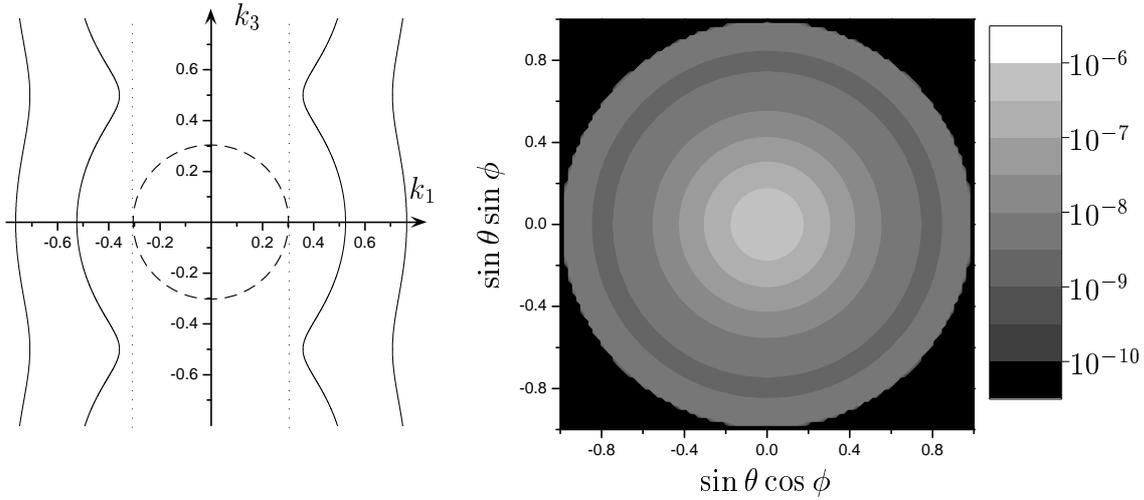


FIG. 7.13: Le champ électromagnétique rayonné au niveau des faces horizontales du cristal. Nous avons représenté sur la figure de gauche la relation de dispersion dans le cristal avec une ligne continue et la relation de dispersion dans le milieu extérieur avec une ligne discontinue. Nous avons représenté sur la figure de droite la fonction $\Pi_{\omega}^{r,m}$: l'échelle de gris est logarithmique.

Le champ électromagnétique rayonné au niveau des faces horizontales du cristal Nous avons représenté sur la figure 7.13 de gauche la relation de dispersion avec une ligne continue dans le cristal et avec une ligne discontinue dans le milieu extérieur. Les interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur sont horizontales. Alors, d'après la propriété 6.1, la composante k_1 est conservée au niveau de ces interfaces planes : le champ électromagnétique venant de l'extérieur ne peut donc pas pénétrer dans le cristal.

Nous avons représenté sur la figure 7.13 à droite la moyenne

$$\Pi_{\omega}^{r,m} = (2\sqrt{\varepsilon^u/\mu^u}/|P_0|^2)(\Pi_{\omega}^{r,(1)} + \Pi_{\omega}^{r,(2)} + \Pi_{\omega}^{r,(3)})/3, \quad (7.61)$$

où les fonctions $\Pi_{\omega}^{r,(1)}$, $\Pi_{\omega}^{r,(2)}$ et $\Pi_{\omega}^{r,(3)}$ sont les densités de flux (7.46) du vecteur de Poynting émis dans le superstrat par unité d'angle solide à l'infini associées aux directions $P_0 = e_1$, $P_0 = e_2$ et $P_0 = e_3$ du dipôle. La fonction Π_{ω}^t coïncide avec la fonction Π_{ω}^r dans ce cas pour des raisons de symétries. La figure 7.13 de droite nous indique donc que le flux du vecteur de Poynting émis est très faible quelque soit l'orientation du dipôle.

Ces résultats sont en accord avec le principe de réciprocité : le champ électromagnétique ne peut pas se propager depuis l'extérieur vers le dipôle et réciproquement.

Données numériques du cristal photonique monodimensionnel séparé du milieu extérieur par des interfaces planes verticales Nous décrivons la structure que nous avons représentée sur la figure 7.12 à droite. Les valeurs numériques de l'ensemble des paramètres sont identiques à celles de l'exemple numérique précédent. Seules les interfaces planes qui séparent le cristal du milieu extérieur sont

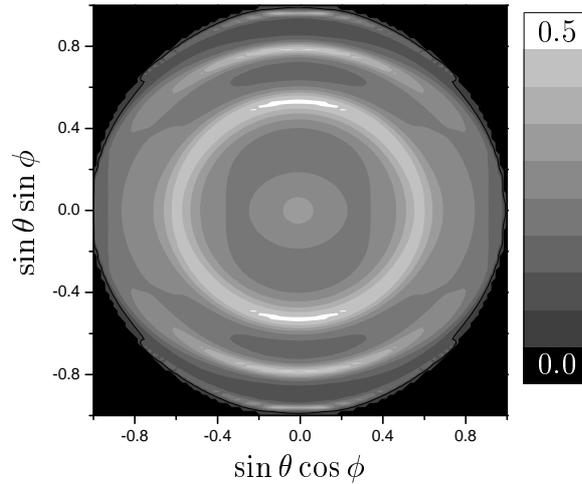


FIG. 7.14: Le champ électromagnétique rayonné au niveau des faces verticales du cristal. Nous avons représenté la fonction $\Pi_{\omega}^{r,m}$: l'échelle de gris est logarithmique.

modifiées : l'équation des interfaces planes verticales est

$$x_1 = x'_3 = -(n/2)h_3 \quad \text{et} \quad x_1 = x'_3 = +(n/2)h_3 \quad \text{avec} \quad n = 32. \quad (7.62)$$

Le cristal est donc infini dans les directions e_2 et e_3 : c'est un empilement infini de lames infiniment longues et de largeur nh_3 . La position de la source est (7.56) : la source se trouve donc au centre du cristal.

Le champ électromagnétique rayonné au niveau des faces verticales du cristal Les interfaces planes séparant le cristal du milieu extérieur sont verticales. Alors, d'après la propriété 6.1, la composante $k'_1 = k_3$ est conservée au niveau de ces interfaces planes. La figure 7.13 de gauche indique donc que le champ électromagnétique venant de l'extérieur peut pénétrer dans le cristal.

Nous avons représenté sur la figure 7.14 la moyenne (7.61) des différents flux émis dans le superstrat (la fonction Π_{ω}^l coïncide avec la fonction Π_{ω}^r dans ce cas pour des raisons de symétries). La figure 7.14 nous indique donc que le flux du vecteur de Poynting émis est du même ordre de grandeur que celui émis dans le cas où le dipôle se trouve dans le vide (figure 7.10).

Ces résultats sont en accord avec le principe de réciprocité : le champ électromagnétique peut se propager depuis l'extérieur vers le dipôle et réciproquement.

Conclusion Nous avons montré numériquement qu'un cristal photonique monodimensionnel en forme cube ne permet pas d'inhiber l'émission spontanée (figure 7.14). De même que sur la figure 7.13 à gauche, il existe toujours des solutions propagatives dans un cristal photonique monodimensionnel. Alors, d'après l'étude de l'influence des interfaces que nous avons réalisée dans le chapitre 6 précédent, nous pouvons généraliser ce résultat : *tout cristal photonique monodimensionnel de taille finie ne permet pas d'inhiber l'émission spontanée*. Enfin, cette étude nous indique que seul un cristal photonique tridimensionnel peut permettre d'inhiber l'émission

spontanée (le phénomène que nous avons mis en évidence se produit également dans le cas d'un cristal bidimensionnel : dans ce cas, le rayonnement électromagnétique peut s'échapper au niveau de deux faces).

L'influence des interfaces (propriété 6.1) et la relation de dispersion du cristal (figure 7.13 à gauche) permettent de justifier *a priori* le rayonnement du dipôle situé à l'intérieur du cristal photonique monodimensionnel en forme de cube (figures 7.13 et 7.14) : nous utilisons pour cela le principe de réciprocité. Enfin, cette justification nous assure que, s'il n'existe pas de solutions propagatives dans un cristal photonique, alors ce cristal photonique peut permettre d'inhiber l'émission spontanée.

7.4.3 Inhibition de l'émission spontanée par un cristal photonique “tas de bois”

Dans cette section 7.4.3, nous plaçons le dipôle à l'intérieur du cristal photonique d'épaisseur finie constitué de n couches élémentaires que nous avons défini dans la section 7.1.3.

Données numériques du cristal photonique Le contraste d'indice du cristal photonique est de 2.4 : les valeurs numériques des constantes diélectriques ε^t et ε^h sont (7.31). Le superstrat et le substrat possèdent les mêmes propriétés que le vide :

$$\varepsilon^u = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon^d = \varepsilon_0. \quad (7.63)$$

Le cristal est constitué de

$$n = 48 \quad (7.64)$$

couches élémentaires. Ce nombre de couches élémentaires est suffisamment grand pour réfléchir la totalité du champ électromagnétique dans la gamme de fréquences situées dans le *gap*. Nous plaçons le dipôle au tiers de la hauteur du cristal et à l'intersection des deux plans de symétrie verticaux (7.14,7.16) :

$$x_0 = (w_{1,1}/2)e_1 + (w_{2,1}/2)e_2 - (n/3)h_3e_3. \quad (7.65)$$

Enfin, nous choisissons une fréquence qui se trouve dans le *gap* (7.33). La valeur numérique de la fréquence normalisée est

$$\omega a \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} / (2\pi) = 0.45. \quad (7.66)$$

Inhibition de l'émission spontanée dans un cristal photonique Nous avons représenté sur la figure 7.15 la moyenne (7.61) des différents flux émis dans le superstrat et sur la figure 7.16 la moyenne

$$\Pi_\omega^{t,m} = (2\sqrt{\varepsilon^u/\mu^u}/|P_0|^2)(\Pi_\omega^{t,(1)} + \Pi_\omega^{t,(2)} + \Pi_\omega^{t,(3)})/3, \quad (7.67)$$

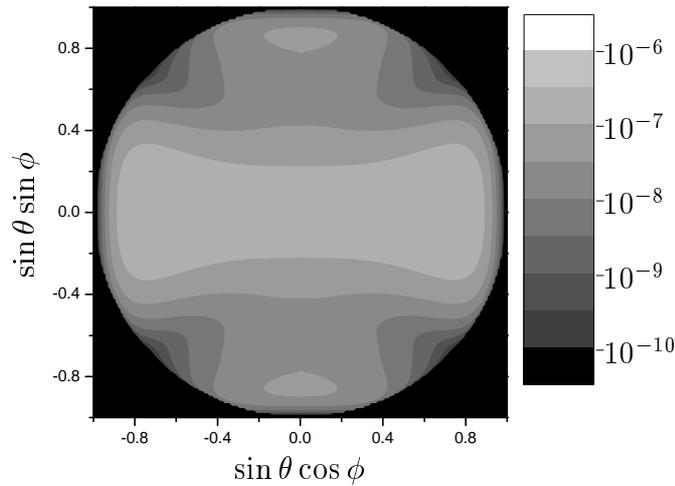


FIG. 7.15: *Inhibition de l'émission spontanée dans un cristal photonique. Nous avons représenté la fonction $\Pi_{\omega}^{r,m}$: l'échelle de gris est logarithmique.*

où les fonctions $\Pi_{\omega}^{t,(1)}$, $\Pi_{\omega}^{t,(2)}$ et $\Pi_{\omega}^{t,(3)}$ sont les densités de flux (7.46) du vecteur de Poynting émis dans le substrat par unité d'angle solide à l'infini associées aux directions $P_0 = e_1$, $P_0 = e_2$ et $P_0 = e_3$ du dipôle.

Nous constatons immédiatement qu'en comparaison avec la figure 7.10, le flux du vecteur de Poynting émis est faible quelle que soit l'orientation du dipôle. D'après (7.64,7.65), le dipôle est séparé du superstrat par 16 couches élémentaires et est séparé du substrat par 32 couches élémentaires. Nous pouvons alors estimer l'influence du nombre de couches élémentaires : le flux du vecteur de Poynting émis est d'autant plus faible que le nombre de couches élémentaires est grand. Enfin, d'après les figures 7.15 et 7.16, le flux du vecteur de Poynting émis est toujours inférieur à 10^{-6} dans le superstrat et à 10^{-12} dans le substrat.

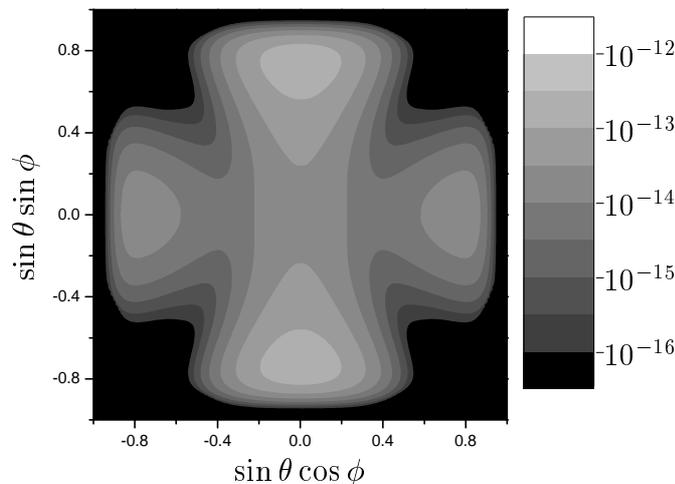


FIG. 7.16: *Inhibition de l'émission spontanée dans un cristal photonique. Nous avons représenté la fonction $\Pi_{\omega}^{l,m}$: l'échelle de gris est logarithmique.*

Conclusion D’après (7.33), il n’existe pas de solutions propagatives dans le cristal pour la fréquence (7.66). Alors, d’après l’étude des interfaces du chapitre 6, nous savons que, contrairement au cas du cristal photonique monodimensionnel (section 7.4.2), ce cristal photonique de taille finie permet d’inhiber l’émission spontanée.

Nous avons montré numériquement qu’un cristal photonique peut inhiber l’émission spontanée de fréquence ω si cette fréquence est dans un *gap* : cet exemple numérique confirme le résultat théorique (2.26) que nous avons présenté dans la section 2.2.

Notre calcul permet d’estimer dans quelle mesure l’émission spontanée est inhibée par un cristal photonique réel, constitué d’un nombre fini de couches élémentaires. Nous avons montré numériquement qu’un empilement de 32 couches élémentaires peut posséder des propriétés très proches de celles d’un cristal photonique “idéal” : le flux du vecteur de Poynting émis à travers 32 couches élémentaires est négligeable.

7.5 Conclusion

Nous avons montré numériquement que le cristal photonique réalisé expérimentalement par S. Lin *et al.* présente un large *gap* (7.30) ; notre résultat confirme les résultats établis à partir d’autres méthodes numériques [11, 12, 42].

Nous avons également montré que ce cristal présente encore un *gap* (7.33) si le contraste d’indice n’est plus que de 2.4. Le *gap* est alors plus étroit ; nous avons déterminé avec précision les bords de ce *gap* pour nous assurer de l’existence de celui-ci.

Deux facteurs ont une influence sur la possibilité que possède un cristal photonique de présenter un *gap* : les paramètres qui définissent la géométrie du cristal et le contraste d’indice. Nos résultats montrent que le contraste d’indice de 2.4 est vraisemblablement proche du plus petit contraste d’indice qui permet au cristal photonique que nous avons étudié de présenter un *gap*. Seulement, comme cela est suggéré dans [11], la géométrie du cristal photonique “tas de bois” que nous avons étudié n’est vraisemblablement pas la meilleure ; d’après [11], avec une géométrie optimale, un cristal photonique “tas de bois” pourrait présenter un *gap* pour des contrastes d’indice proches de 2.0. Dans ce cas, une large gamme de matériaux serait disponible pour réaliser expérimentalement des cristaux photoniques : en plus de présenter un *gap*, ces cristaux photoniques présenteraient l’intérêt de répondre à d’autres exigences [11] (procédés de fabrication plus simples, robustesse, *etc.* ...).

Déterminer le plus petit contraste d’indice qui permet à un cristal photonique de présenter un *gap* nécessite des calculs précis ; nous pensons que les méthodes et le code numériques que nous avons développés sont particulièrement bien adaptés à cette tâche.

A. Moroz et C. Sommers ont déjà réalisé cette tâche dans le cas des réseaux de sphères diélectriques [10] en utilisant la méthode KKR [37] : dans ce cas, le plus petit contraste d’indice qui permet au cristal de présenter un *gap* est égal à 2.85.

Nous avons étudié numériquement la transmission à travers un cristal photo-

nique. Cette étude permet de simuler numériquement l’expérience qui vise à déterminer les *gaps* des cristaux photoniques [11, 12].

Nous avons montré l’évolution de la transmission quand le nombre de couches élémentaires augmente pour les fréquences se trouvant dans un *gap* : de même que les mesures expérimentales réalisées dans [11, 12] et les calculs numériques réalisés dans [42], nos calculs numériques montrent que la transmission est atténuée de façon exponentielle quand le nombre de couches élémentaires augmente.

Enfin, nous avons étudié la possibilité d’inhiber l’émission spontanée avec un cristal photonique. Nous avons pris en compte la taille finie du cristal à l’intérieur duquel se trouve la source optique.

Nous avons montré numériquement pourquoi nous pensons qu’un cristal photonique monodimensionnel de taille finie ne permet pas d’inhiber l’émission spontanée. Nous avons montré dans quelle mesure l’émission spontanée est inhibée par un cristal photonique réel, constitué d’un nombre fini de couches élémentaires.

Troisième partie

Conclusion

Nous avons développé un code numérique qui résout les équations de Maxwell harmoniques (4) dans une structure “tas de bois”. La démarche générale de notre code numérique repose sur la méthode que nous avons qualifiée de “méthode réseau” ; cette méthode présente de nombreux intérêts (section 5.7.1). Parmi ceux-ci, nous avons largement exploité la possibilité d’imposer des conditions aux limites de la structure “tas de bois” de natures différentes.

Nous avons élaboré un algorithme qui permet d’imposer les conditions de Bloch aux limites de la structure “tas de bois” sans instabilités numériques (section 5.6) ; la condition de Bloch permet de déterminer les propriétés des cristaux photoniques périodiques dans les trois directions de l’espace.

Ainsi, nous avons déterminé avec précision les *gaps* que présentent les cristaux photoniques “tas de bois” réalisés expérimentalement par S. Lin *et al.* [11, 12] (section 7.2). Nos résultats sont en accord avec les résultats établis à partir d’autres méthodes numériques [11, 42].

Nous avons imposé la condition d’onde sortante aux limites de la structure “tas de bois” (section 5.5) ; la condition d’onde sortante permet de simuler numériquement l’expérience qui consiste à éclairer une structure de taille finie par un champ incident puis à déterminer le champ diffracté.

Ainsi, nous avons déterminé les propriétés de diffraction des cristaux photoniques monodimensionnels de formes variées. Nous avons établi une règle qui permet d’estimer *a priori* l’influence d’interfaces suffisamment régulières séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur (section 6.4.1). En associant cette règle avec notre code numérique, nous avons mis en évidence numériquement de nombreux phénomènes de réfraction inhabituels : nous avons montré des phénomènes qui seraient observés s’il existait des milieux homogènes obéissant à la deuxième loi de Descartes et d’indice optique inférieur à celui du vide (section 6.1.1) ou négatif (section 6.1.2). Nous avons également montré numériquement la possibilité de réaliser des lentilles de distance focale très petite (sections 6.1.3 et 6.4.2).

Enfin, la condition d’onde sortante nous a permis d’étudier numériquement la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise à travers un cristal photonique “tas

de bois” (section 7.3); cette étude permet de simuler l’expérience réalisée pour déterminer les *gaps* des cristaux photoniques [1, 2, 11]. De même que dans [11, 12, 42], nous avons montré que la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise à travers le cristal tend vers zéro de façon exponentielle dans un *gap*.

Nous avons également imposé une condition aux limites de la structure “tas de bois” qui permet de placer la source du champ électromagnétique à l’intérieur de la structure [84]; cette condition permet de simuler un atome alimenté en énergie se trouvant à l’intérieur d’un cristal photonique (section 7.4.1).

Ainsi, nous avons étudié la possibilité d’inhiber le phénomène de l’émission spontanée en présence d’un cristal photonique. Nous avons montré qu’il est nécessaire de considérer un cristal photonique tridimensionnel pour inhiber l’émission spontanée (section 7.4.2). Enfin, nous avons montré dans quelle mesure un cristal photonique “tas de bois” d’épaisseur finie permet d’inhiber le phénomène de l’émission spontanée (section 7.4.3).

Conclusion générale

En conclusion, nous récapitulons l'ensemble des résultats que nous avons obtenus, nous rassemblons de façon synthétique ces résultats puis nous présentons les prolongements induits par notre étude.

Récapitulation des résultats obtenus

Etude de l'influence des interfaces qui séparent un cristal photonique de taille finie du milieu extérieur (question 1.1) Nous estimons que nous avons donné une réponse aussi complète que possible à cette question dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels.

Dans un premier temps, nous avons déterminé le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique monodimensionnel "usuel" d'épaisseur suffisamment grande (deuxième partie) : de même qu'en optique géométrique, ce comportement peut être interprété par la théorie des rayons.

Nous avons alors montré que l'angle de réfraction des différents rayons est déterminé par la vitesse de groupe et nous avons déterminé les fractions d'énergie réfléchie et transmise au niveau des interfaces. Nous avons récapitulé l'ensemble de ces résultats dans la section 4.7.

Dans un second temps, nous avons étudié le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique monodimensionnel de forme quelconque (chapitre 6) ; nous avons déterminé l'angle de réfraction des différents rayons au niveau d'une interface de forme quelconque et suffisamment régulière séparant un cristal photonique monodimensionnel du milieu extérieur (section 6.4.1).

Nous avons alors mis en évidence des phénomènes de réfraction qui ne peuvent être observés dans le cas de matériaux homogènes usuels : nous avons montré des phénomènes qui seraient observés s'il existait des milieux homogènes obéissant à la deuxième loi de Descartes et d'indice optique inférieur à celui du vide (section 6.1.1) ou négatif (section 6.1.2).

Enfin, nous avons montré numériquement la possibilité de réaliser des lentilles de distance focale très petite (sections 6.1.3 et 6.4.2).

Approximation d'un cristal photonique de taille finie par un cristal photonique infini (question 1.2) Nous avons donné des éléments de réponse à cette question dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels et des cristaux

photoniques “tas de bois”.

Nous avons étudié dans quelle mesure un cristal photonique d'épaisseur finie peut se comporter comme un miroir parfait pour les longueurs d'onde se situant dans un *gap*. Nous avons montré théoriquement dans le cas monodimensionnel (section 4.2.1) et numériquement dans le cas “tas de bois” (section 7.3) que, dans un *gap*, la fraction du flux du vecteur de Poynting transmise tend de façon exponentielle vers zéro quand le nombre de couches élémentaires qui constituent le cristal augmente.

Ce résultat indique qu'un empilement d'un petit nombre de couches élémentaires peut posséder des propriétés très proches de celles d'un miroir parfait pour les longueurs d'onde se situant dans un *gap*.

Nous avons également étudié dans quelle mesure un cristal photonique de taille finie peut permettre d'inhiber l'émission spontanée pour les longueurs d'ondes se situant dans un *gap*.

Nous avons montré qu'un cristal photonique monodimensionnel de taille finie ne peut pas permettre d'inhiber l'émission spontanée (section 7.4.2) : la théorie des rayons associée au théorème de réciprocité justifie ce phénomène. Il est donc nécessaire de considérer un cristal photonique tridimensionnel pour inhiber l'émission spontanée.

Nous avons alors montré numériquement qu'un cristal photonique “tas de bois” constitué de quelques dizaines de couches élémentaires permet d'inhiber l'émission spontanée (section 7.4.3).

Enfin, nous avons montré que la théorie des rayons permet d'interpréter les propriétés d'une lentille dont les dimensions sont de l'ordre de quelques dizaines de longueurs d'ondes (section 6.1.3 et 6.4.2).

Tous ces résultats indiquent que les propriétés d'un cristal photonique de taille finie, dont les dimensions sont supérieures à quelques dizaines de longueurs d'ondes, peuvent être estimées à partir de la relation de dispersion du cristal parfait : les propriétés d'un tel cristal photonique de taille finie sont proches de celles d'un cristal infini.

Etude numérique des propriétés des cristaux photoniques “tas de bois” (objectifs 2.1, 2.2 et 2.3) Nous avons développé un code numérique qui nous a permis de réaliser ces trois objectifs.

Notre code numérique est capable de résoudre les équations de Maxwell non seulement en présence d'un cristal périodique dans les trois directions de l'espace mais aussi en présence d'un cristal périodique dans deux directions de l'espace et limité dans la troisième. Pour cela, nous avons élaboré un algorithme qui permet d'obtenir la relation de dispersion d'un cristal à partir d'un code numérique de type “code réseau” : notre algorithme permet de déterminer sans instabilités numériques les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert à travers une

couche réseau à partir de la matrice S (section 5.6.3) ou de la matrice R (section 5.6.2). Nous avons montré que notre algorithme est numériquement stable (section 5.6.4).

Notre code numérique utilise la méthode des “valeurs propres et fonctions propres exactes” (section 5.4). Il évite ainsi le principal défaut de ceux utilisant la base de Fourier : avec la méthode que nous utilisons, les fonctions ε et μ sont toujours représentées de façon exacte. Surtout, nous avons montré dans un cas particulier la supériorité de la méthode que nous utilisons sur une méthode utilisant la base de Fourier (section 5.5.4).

Plus généralement, nous avons situé les méthodes numériques que nous avons développées parmi les méthodes généralement utilisées dans la section 5.7.

En pratique, concernant cette étude des cristaux photoniques “tas de bois”, le résultat le plus significatif que nous avons obtenu réside dans la précision de notre calcul de la relation de dispersion (section 7.2). Ainsi, nous avons pu confirmer les résultats présentés dans la littérature obtenus à partir des méthodes utilisant la base de Fourier.

Synthèse

L'étude que nous avons réalisée nous indique que nous pouvons estimer le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique de forme quelconque et dont les dimensions sont très grandes devant la longueur d'onde. Ce comportement peut être interprété au moyen de notions concernant la trajectoire de l'énergie dans un cristal photonique, qui s'apparente à la théorie des rayons (inspirée de l'optique géométrique).

Cette interprétation permet de décrire précisément le comportement du champ électromagnétique si nous connaissons

- 1 *la relation de dispersion dans le cristal photonique,*
- 2 *l'influence de la frontière séparant le cristal photonique du milieu extérieur,*
- 3 *dans quelle mesure les dimensions du cristal doivent être très grandes devant la longueur d'onde.*

Nous avons développé un code numérique qui nous permet de déterminer avec précision la relation de dispersion des cristaux photonique “tas de bois”, structures à bandes interdites photoniques parmi les plus prometteuses.

Nous avons déterminé l'influence de la frontière séparant le cristal photonique du milieu extérieur : *si $\omega(k)$ est la relation de dispersion, les composantes tangentielles du vecteur k sont conservées.*

Nous avons déterminé dans quelle mesure les règles que nous avons établies sont valides : tous nos exemples numériques montrent que les propriétés d'un cristal photonique de taille finie, dont les dimensions sont supérieures à quelques dizaines de

longueurs d'ondes, sont proches de celles d'un cristal infini.

Cette interprétation constitue un guide pour concevoir des structures en cristal photonique possédant des propriétés précises. Néanmoins, la résolution numérique des équations de Maxwell en présence du cristal de forme quelconque reste en général indispensable pour vérifier si l'interprétation est valide et pour déterminer quantitativement les énergies mises en jeu.

Perspectives

Notre étude conduit naturellement aux prolongements suivants (nous avons déjà donné quelques éléments de réponse pour certains).

Diffraction par des cristaux photoniques bi et tridimensionnels de forme quelconque Nous avons essentiellement répondu à la question 1.1 dans le cas des cristaux photoniques monodimensionnels (section 4.7). Nous pouvons alors naturellement nous poser la question suivante :

3.1 *La théorie des rayons permet-elle d'interpréter le comportement du champ électromagnétique en présence d'un cristal photonique bi ou tridimensionnel de forme quelconque?*

Et dans le cas où la réponse à cette question 3.1 est affirmative :

3.2 *Quel est l'angle de réfraction des rayons au passage d'une interface?*

L'exemple numérique que nous avons présenté dans la section 6.4.2 nous incite à répondre affirmativement à la question 3.1 : la figure 6.4 nous indique que, qualitativement, le champ électromagnétique peut être interprété comme une série de rayons.

Nous avons donné des éléments de réponse à la question 3.2 dans la section 6.2.6 : les propriétés 6.1 et 6.2 que nous avons établies dans les sections 6.2.5 et 6.4.1 sont encore valables si le plan tangent à la frontière du cristal contient une face d'une maille élémentaire permettant d'engendrer le cristal. Ce résultat est confirmé numériquement dans [23]. Surtout, nous pensons que *les propriétés 6.1 et 6.2 restent valables dans tous les cas* pour la raison suivante : de même que tout nombre réel peut être approché par un nombre rationnel, toute partie de la frontière du cristal peut être approchée par un plan contenant une face d'une maille élémentaire du cristal.

Canalisation de l'émission spontanée dans un angle solide étroit Nous avons montré dans la section 2.1.5 qu'un cristal photonique peut théoriquement permettre de canaliser l'émission spontanée dans un angle solide étroit. Ce phénomène se produit notamment aux bords des *gaps*.

Il s'avère que, dans le cas des cristaux photoniques “tas de bois” que nous avons étudiés, il n'existe pas de solution propagative dans le milieu extérieur aux bords du *gap*.

Une solution pour résoudre ce problème consiste à perturber une maille élémentaire sur deux du cristal photonique : nous obtenons alors une structure dite “doublement périodique”. Cette “double période” a pour conséquence de déplacer les bords du *gap* : il existe alors une solution propagative aux bords du *gap* qui permettrait de canaliser l'énergie au voisinage de l'incidence normale.

Nous pensons que notre code numérique est particulièrement bien adapté pour mettre en évidence ce phénomène.

Etude des *gaps* des cristaux photoniques “tas de bois” D'après [11] un cristal photonique “tas de bois” pourrait présenter un *gap* pour des contrastes d'indice proches de 2.0. Dans ce cas, une large gamme de matériaux serait disponible pour réaliser expérimentalement des cristaux photoniques. Répondre précisément à la question suivante présenterait alors un grand intérêt.

3.3 *Quel est le plus petit contraste d'indice diélectrique permettant à un cristal photonique “tas de bois” de présenter un *gap*?*

Deux facteurs ont une influence sur la possibilité que possède un cristal photonique de présenter un *gap* : les paramètres qui définissent la géométrie du cristal et le contraste d'indice.

L'influence du contraste d'indice est bien connue : plus le contraste d'indice est élevé, plus la possibilité que possède un cristal de présenter un *gap* augmente. Nous avons montré que notre code numérique est particulièrement bien adapté pour déterminer le plus petit contraste d'indice pour une géométrie donnée.

L'influence de la géométrie d'un cristal photonique “tas de bois” nous semble moins évidente à estimer. C'est pourquoi nous pensons qu'une étude de cette influence mérite d'être réalisée.

Nous pensons que les cristaux photoniques “tas de bois” constituent la classe de structures cristallines tridimensionnelles la plus simple : la simplicité de ces structures pourrait permettre de réaliser des estimations théoriques. Ces estimations constitueraient le prolongement de celles établies dans [32, 34] dans le cas des cristaux photoniques bidimensionnels constitués de tiges diélectriques.

Annexes

Annexe A

Preuve du lemme fondamental

Dans cette annexe A nous présentons une preuve du lemme que nous avons énoncé dans la section 4.3. Nous déterminons la limite quand n tend vers l'infini de l'intégrale

$$\int_B g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 \quad (\text{A.1})$$

pour tout f, g continûment dérivable. Nous estimons également la différence entre cette intégrale et sa limite quand n tend vers l'infini. Cette annexe ne peut être séparée de la deuxième partie de ce mémoire; nous utilisons des notations et des résultats présentés dans la deuxième partie. L'idée générale de notre démonstration consiste à approcher la fonction g et la partie non-oscillante de la fonction $f(t_n^d, r_n^u)$ par des fonctions constantes par morceaux. Ces fonctions constantes par morceaux doivent satisfaire une condition: toutes les marches d'escalier doivent avoir la même largeur imposée par la période de la partie oscillante de la fonction $f(t_n^d, r_n^u)$. Cette largeur est donc d'autant plus petite que le nombre de couches élémentaires n est grand. Nous pourrions alors intégrer la partie oscillante de la fonction $f(t_n^d, r_n^u)$.

C'est parce que nous approchons la fonction g et la partie non-oscillante de la fonction $f(t_n^d, r_n^u)$ par des fonctions constantes par morceaux particulières que nous avons besoin de contrôler les variations des fonctions f et g (les fonctions f et g sont continûment dérivables).

Enfin, nous procédons en deux temps. Dans un premier temps, nous considérons un intervalle fermé inclus dans la bande de transparence B où la dérivée par rapport à la variable α_1 de la trace de la matrice T ne s'annule jamais. Dans un deuxième temps, nous généralisons le résultat pour obtenir la preuve du lemme fondamental.

A.1 Preuve du lemme fondamental dans un cas particulier

Dans cette section nous présentons dans un cas particulier une preuve du lemme que nous avons énoncé dans la section 4.3. Soit $[a_-, a_+]$ un intervalle fermé inclus dans B où la dérivée par rapport à la variable α_1 de la trace de la matrice T ne

s'annule pas. Soit

$$I_n = \int_{a_-}^{a_+} g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1, \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\forall \alpha_1 \in [a_-, a_+] \subset B : \frac{\partial \text{tr} T}{\partial \alpha_1}(\alpha_1) \neq 0. \quad (\text{A.3})$$

Nous montrons le lemme ci-dessous.

Lemme A.1 Soient f de $\Omega_t \times \Omega_r$ dans \mathbb{C} et g de B dans \mathbb{C} des fonctions continûment dérivables. Soient $\|f\|_\infty$, $\|g\|_\infty$, $\|f'\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$ les normes uniformes des fonctions f et g et de leurs dérivées. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_\epsilon(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty)$ tel que : $n \geq n_\epsilon(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty) \implies$

$$\left| I_n - \int_{a_-}^{a_+} g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \leq \epsilon. \quad (\text{A.4})$$

Preuve du lemme A.1 Nous déterminons la limite de l'intégrale I_n quand le nombre n tend vers l'infini en cinq étapes. Nous réalisons le changement de variable α_1 en φ dans l'intégrale I_n (étape 1), nous décomposons l'intervalle d'intégration en intervalles de longueur $2\pi/n$ (étape 2), nous approchons la fonction g (étape 3), nous approchons la partie non-oscillante de la fonction $f(t_n^d, r_n^u)$ (étape 4), et enfin nous recomposons l'intervalle d'intégration (étape 5).

Etape 1 : changement de variable α_1 en φ D'après (A.3), la dérivée par rapport à la variable α_1 de la trace de la matrice T ne s'annule pas. Alors, d'après (3.52), la dérivée par rapport à la variable α_1 de la fonction φ ne s'annule pas.

$$\forall \alpha_1 \in [a_-, a_+] : \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}(\alpha_1) = -\frac{\partial \text{tr} T / 2}{\partial \alpha_1}(\alpha_1) / \sin \varphi(\alpha_1) \neq 0. \quad (\text{A.5})$$

La division par $\sin \varphi$ ne pose pas de problème puisque $\alpha_1 \in [a_-, a_+] \subset B \implies \sin \varphi(\alpha_1) > 0$ (d'après (3.52)). Nous pouvons alors réaliser le changement de variable α_1 en φ . Nous définissons d'abord les fonctions \tilde{t} et \tilde{r} à partir des fonctions t et r (4.16). Soient pour tout $(v, \varphi) \in [0, 2\pi] \times]0, \pi[:$

$$\tilde{t}(v, \varphi) = t[v, \alpha_1(\varphi)] \quad \text{et} \quad \tilde{r}(v, \varphi) = r[v, \alpha_1(\varphi)]. \quad (\text{A.6})$$

Enfin, d'après la propriété 3.1, la matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 . Alors, d'après (3.52) la fonction φ est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 dans B . L'image par φ de l'intervalle $[a_-, a_+]$ est donc un intervalle. Soient $\varphi_- = \varphi(a_-)$ et $\varphi_+ = \varphi(a_+)$. Alors, d'après (4.16, A.6), l'expression (A.2) de l'intégrale I_n peut s'écrire

$$I_n = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \tilde{g}(\varphi) f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] d\varphi, \quad (\text{A.7})$$

où

$$\forall \varphi \in [\varphi_-, \varphi_+] : \tilde{g}(\varphi) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi}(\varphi) g[\alpha_1(\varphi)]. \quad (\text{A.8})$$

La fonction \tilde{g} et sa dérivée \tilde{g}' sont uniformément bornées par rapport à $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$. Soient $\|\tilde{g}\|_\infty$ et $\|\tilde{g}'\|_\infty$ la norme uniforme de ces fonctions.

La fonction \tilde{g} est uniformément bornée sur l'intervalle $[\varphi_-, \varphi_+]$. Preuve D'après l'expression (A.8) de la fonction \tilde{g} , nous devons majorer uniformément la fonction $\partial \alpha_1 / \partial \varphi$ pour majorer $\|\tilde{g}\|_\infty$. D'après sa définition (3.52), la fonction φ est, de même que la matrice T (propriété 3.1), infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 dans B . D'après l'hypothèse (A.5), la dérivée de la fonction φ ne s'annule jamais dans $[a_-, a_+]$. Alors, la fonction réciproque $\varphi \mapsto \alpha_1(\varphi)$ est aussi infiniment dérivable. En particulier, les fonctions $\partial \alpha_1 / \partial \varphi$ et $\partial^2 \alpha_1 / \partial^2 \varphi$ sont continues (et donc bornées) sur l'ensemble compact $[\varphi_-, \varphi_+]$. Soient $\|\alpha'_1\|_\infty$ et $\|\alpha''_1\|_\infty$ la norme uniforme des fonctions $\partial \alpha_1 / \partial \varphi$ et $\partial^2 \alpha_1 / \partial^2 \varphi$.

$$\forall \varphi \in [\varphi_-, \varphi_+] : \left| \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi}(\varphi) \right| \leq \|\alpha'_1\|_\infty \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial^2 \varphi}(\varphi) \right| \leq \|\alpha''_1\|_\infty. \quad (\text{A.9})$$

Alors, d'après l'expression (A.8), la fonction \tilde{g} est uniformément bornée par rapport à $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$ et

$$\|\tilde{g}\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|\alpha'_1\|_\infty. \quad (\text{A.10})$$

La fonction \tilde{g}' est uniformément bornée sur l'intervalle $[\varphi_-, \varphi_+]$. Preuve D'après l'expression (A.8) de la fonction \tilde{g} ,

$$\forall \varphi \in [\varphi_-, \varphi_+] : \tilde{g}'(\varphi) = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial^2 \varphi}(\varphi) g[\alpha_1(\varphi)] + \left[\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi}(\varphi) \right]^2 g'[\alpha_1(\varphi)]. \quad (\text{A.11})$$

Nous avons déjà majoré toutes les fonctions qui interviennent cette expression de \tilde{g}' . Alors, d'après (A.9), la fonction \tilde{g}' est uniformément bornée par rapport à $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$ et

$$\|\tilde{g}'\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|\alpha''_1\|_\infty + \|g'\|_\infty \|\alpha'_1\|_\infty^2. \quad (\text{A.12})$$

Etape 2 : décomposition de l'intervalle $[\varphi_-, \varphi_+]$ Soit $m \in \mathbb{N}$ la partie entière de $|\varphi_+ - \varphi_-|n/(2\pi)$: $m \leq |\varphi_+ - \varphi_-|n/(2\pi) < m + 1$. Soit

$$\varphi_l = \varphi_- + l \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{|\varphi_+ - \varphi_-|} \frac{2\pi}{n} \quad \forall l \in \{0, \dots, m\}. \quad (\text{A.13})$$

Nous coupons l'intervalle $[\varphi_-, \varphi_+]$ en intervalles de largeur $2\pi/n$: ces intervalles sont $[\varphi_l, \varphi_{l+1}]$, $l \in \{0, \dots, m\}$. Chaque intervalle $[\varphi_l, \varphi_{l+1}]$ correspond à une période de la partie oscillante de fonction $f(t_n^d, r_n^u)$. L'expression (A.7) de l'intégrale I_n peut s'écrire

$$I_n = c_1(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} \tilde{g}(\varphi) f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] d\varphi, \quad (\text{A.14})$$

où

$$c_1(n) = \int_{\varphi_m}^{\varphi_+} \tilde{g}(\varphi) f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] d\varphi. \quad (\text{A.15})$$

Les fonctions \tilde{g} et f sont uniformément bornées (d'après (A.10) pour \tilde{g} et d'après les hypothèses du lemme pour f) et la longueur de l'intervalle $[\varphi_m, \varphi_+]$ est inférieure à $2\pi/n$ (puisque $m \leq |\varphi_+ - \varphi_-|n/(2\pi) < m + 1$). Alors, nous pouvons majorer le terme correcteur $c_1(n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : |c_1(n)| \leq \|\tilde{g}\|_\infty \|f\|_\infty \int_{\varphi_m}^{\varphi_+} d\varphi \leq \|\tilde{g}\|_\infty \|f\|_\infty (2\pi/n). \quad (\text{A.16})$$

Etape 3 : approximation de la fonction \tilde{g} Nous approchons la fonction \tilde{g} par une fonction constante par morceaux. L'expression (A.14) de l'intégrale I_n peut s'écrire

$$I_n = c_2(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{g}(\varphi_l) \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] d\varphi, \quad (\text{A.17})$$

où

$$c_2(n) = c_1(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} [\tilde{g}(\varphi) - \tilde{g}(\varphi_l)] f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] d\varphi. \quad (\text{A.18})$$

D'après (A.12), la fonction \tilde{g}' est uniformément bornée. Alors, en utilisant le théorème des accroissements finis pour la fonction \tilde{g} nous obtenons pour tout $l \in \{0, \dots, m\}$,

$$\forall \varphi \in [\varphi_l, \varphi_{l+1}] : |\tilde{g}(\varphi) - \tilde{g}(\varphi_l)| \leq \|\tilde{g}'\|_\infty |\varphi - \varphi_l| \leq \|\tilde{g}'\|_\infty (2\pi/n). \quad (\text{A.19})$$

D'après les hypothèses du lemme, la fonction f est uniformément bornée. Alors, nous pouvons majorer le terme correcteur $c_2(n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : |c_2(n)| \leq |c_1(n)| + \|\tilde{g}'\|_\infty \|f\|_\infty |\varphi_+ - \varphi_-| (2\pi/n). \quad (\text{A.20})$$

Etape 4 : approximation de la partie non-oscillante de la fonction $f(\tilde{t}, \tilde{r})$ Nous approchons la partie non-oscillante de la fonction $f(\tilde{t}, \tilde{r})$ par des fonctions constantes par morceaux. L'expression (A.17) de l'intégrale I_n peut s'écrire

$$I_n = c_3(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{g}(\varphi_l) \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi_l), \tilde{r}(n\varphi, \varphi_l)] d\varphi, \quad (\text{A.21})$$

où

$$c_3(n) = c_2(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{g}(\varphi_l) \int_{\varphi_l}^{\varphi_{l+1}} \{ f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] - f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi_l), \tilde{r}(n\varphi, \varphi_l)] \} d\varphi. \quad (\text{A.22})$$

Nous majorons le terme correcteur $c_3(n)$. Les fonctions $\partial\tilde{t}/\partial\varphi$ et $\partial\tilde{r}/\partial\varphi$ sont uniformément bornées par rapport à $(v, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [\varphi_-, \varphi_+]$. Soient $\|\partial\tilde{t}/\partial\varphi\|_\infty$ et $\|\partial\tilde{r}/\partial\varphi\|_\infty$ la norme uniforme de ces fonctions.

Les fonctions $\partial\tilde{t}/\partial\varphi$ et $\partial\tilde{r}/\partial\varphi$ sont uniformément bornées par rapport à $(v, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [\varphi_-, \varphi_+]$. **Preuve** D'après (4.16), les fonctions t et r s'expriment (par l'intermédiaire des fonctions p_c, p_s, q_c, q_s et φ (3.56,3.52)) à partir de la matrice T . Nous avons montré (4.17) que ces fonctions t et r sont uniformément bornées par rapport à $(v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times K_1$. La majoration de la fonction t implique le dénominateur des fonctions t et r n'est jamais nul. Alors, les fonctions t et r sont infiniment dérivables par rapport aux variables $v \in [0, 2\pi]$ et $\alpha_1 \in K_1$ (puisque la matrice T est infiniment dérivable par rapport à la variable α_1 d'après la propriété 3.1). En particulier, les fonctions $\partial t/\partial\alpha_1$ et $\partial r/\partial\alpha_1$ sont continues dans l'ensemble compact $[0, 2\pi] \times [a_-, a_+]$. Elles sont donc uniformément bornées par rapport à $(v, \alpha_1) \in [0, 2\pi] \times [a_-, a_+]$. Nous notons $\|\partial t/\partial\alpha_1\|_\infty$ et $\|\partial r/\partial\alpha_1\|_\infty$ leur norme uniforme. Enfin, d'après (A.9), la fonction $\partial\alpha_1/\partial\varphi$ est uniformément bornée par rapport à $\varphi \in [\varphi_-, \varphi_+]$. Alors, les fonctions $\partial\tilde{t}/\partial\varphi$ et $\partial\tilde{r}/\partial\varphi$ sont uniformément bornées par rapport à $(v, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [\varphi_-, \varphi_+]$ et

$$\|\partial\tilde{t}/\partial\varphi\|_\infty \leq \|\alpha'_1\|_\infty \|\partial t/\partial\alpha_1\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\partial\tilde{r}/\partial\varphi\|_\infty \leq \|\alpha'_1\|_\infty \|\partial r/\partial\alpha_1\|_\infty. \quad (\text{A.23})$$

D'après les hypothèses du lemme, la fonction f' est uniformément bornée. Alors, en utilisant le théorème des accroissements finis pour les fonctions \tilde{t} , \tilde{r} et f nous obtenons pour tout $l \in \{0, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in [\varphi_l, \varphi_{l+1}] : & \left| f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi), \tilde{r}(n\varphi, \varphi)] - f[\tilde{t}(n\varphi, \varphi_l), \tilde{r}(n\varphi, \varphi_l)] \right| \\ & \leq \|f'\|_\infty [|\tilde{t}(n\varphi, \varphi) - \tilde{t}(n\varphi, \varphi_l)| + |\tilde{r}(n\varphi, \varphi) - \tilde{r}(n\varphi, \varphi_l)|] \\ & \leq \|f'\|_\infty [\|\partial\tilde{t}/\partial\varphi\|_\infty + \|\partial\tilde{r}/\partial\varphi\|_\infty] |\varphi - \varphi_l| \\ & \leq \|f'\|_\infty [\|\partial\tilde{t}/\partial\varphi\|_\infty + \|\partial\tilde{r}/\partial\varphi\|_\infty] (2\pi/n) . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

D'après les hypothèses du lemme, la fonction g est uniformément bornée. Alors, nous pouvons majorer le terme correcteur $c_3(n)$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : |c_3(n)| & \leq |c_2(n)| + \|\tilde{g}\|_\infty \|f'\|_\infty [\|\partial\tilde{t}/\partial\varphi\|_\infty + \|\partial\tilde{r}/\partial\varphi\|_\infty] \\ & \quad \times |\varphi_+ - \varphi_-| (2\pi/n). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Étape 5 : recomposition de l'intervalle $[\varphi_-, \varphi_+]$ Nous réalisons le changement de variable $n\varphi$ en v dans chaque intégrale de l'expression (A.21) de I_n .

$$I_n = c_3(n) + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{g}(\varphi_l) \int_{n\varphi_l}^{n\varphi_{l+1}} f[\tilde{t}(v, \varphi_l), \tilde{r}(v, \varphi_l)] dv. \quad (\text{A.26})$$

D'après (A.6,4.16), les fonctions \tilde{t} et \tilde{r} sont périodiques en v ; nous avons défini (A.13) les intervalles $[n\varphi_l, n\varphi_{l+1}]$ afin que leur longueur soit égale à la période de

ces fonctions. Alors, l'expression (A.26) de I_n devient

$$I_n = c_3(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{g}(\varphi_l) \left[(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f[\tilde{t}(v, \varphi_l), \tilde{r}(v, \varphi_l)] dv \right] (\varphi_{l+1} - \varphi_l). \quad (\text{A.27})$$

Nous reconnaissons dans cette dernière expression de l'intégrale I_n la définition (4.19) de $f_\infty[\alpha_1(\varphi_l)]$ pour tout $l \in \{0, \dots, m\}$. Alors, l'expression (A.27) de I_n devient

$$I_n = c_3(n) + \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{g}(\varphi_l) f_\infty[\alpha_1(\varphi_l)] (\varphi_{l+1} - \varphi_l). \quad (\text{A.28})$$

Nous reconnaissons dans cette dernière expression de l'intégrale I_n une somme de Riemann. La fonction $\varphi \mapsto \tilde{g}(\varphi) f_\infty[\alpha_1(\varphi)]$ est continue donc intégrable au sens de Riemann. Alors, l'expression (A.28) de I_n devient

$$I_n = c_4(n) + \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \tilde{g}(\varphi) f_\infty[\alpha_1(\varphi)] d\varphi, \quad (\text{A.29})$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [c_4(n) - c_3(n)] = 0. \quad (\text{A.30})$$

Nous pouvons maintenant réaliser le changement de variable φ en α_1 . D'après la définition (A.8) de la fonction \tilde{g} ,

$$I_n = c_4(n) + \int_{a_-}^{a_+} g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1. \quad (\text{A.31})$$

Conclusion D'après (A.16, A.20, A.25, A.30), le terme correcteur $c_4(n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Surtout, notre raisonnement implique que ce terme correcteur dépend de $\|f\|_\infty$, $\|g\|_\infty$, $\|f'\|_\infty$ et $\|g'\|_\infty$. Enfin, l'expression (A.31) de l'intégrale I_n implique que le lemme A.1 est vrai.

A.2 Preuve du lemme fondamental dans le cas général

Dans cette section nous présentons une preuve du lemme que nous avons énoncé dans la section 4.3. Cette preuve consiste à isoler l'ensemble des points "spéciaux" de la bande de transparence B puis à utiliser le lemme A.1.

Preuve du lemme fondamental Soit Δ_1 l'ensemble des points de la bande de transparence B où la dérivée par rapport à la variable α_1 de la trace de la matrice T est nulle.

$$\Delta_1 = \{ \alpha_1 \in K_1 \mid (\partial \text{tr} T / \partial \alpha_1)(\alpha_1) = 0 \}. \quad (\text{A.32})$$

L'ensemble Δ_1 est, de même que la frontière Δ_0 , constitué d'un nombre fini de points (nous avons montré que la frontière Δ_0 est constituée d'un nombre fini de points dans la section 4.1.3). Soit m le nombre de points dans l'ensemble $\Delta_0 \cup \Delta_1$.

$$m = \text{cardinal}(\Delta_0 \cup \Delta_1) < \infty. \quad (\text{A.33})$$

L'ensemble $\Delta_0 \cup \Delta_1$ est l'ensemble des points que nous avons qualifiés de "spéciaux". Nous les isolons ; soit, pour tout $\eta > 0$, l'ensemble Δ_η des points de K_1 situés à une distance inférieure ou égale à η de l'ensemble $\Delta_0 \cup \Delta_1$.

$$\Delta_\eta = \{ \alpha_1 \in K_1 \mid |\alpha_1 - \alpha_0| < \eta \text{ et } \alpha_0 \in \Delta_0 \cup \Delta_1 \}. \quad (\text{A.34})$$

D'après (A.33, A.34), nous pouvons majorer la mesure $|\Delta_\eta|$ de l'ensemble Δ_η : $|\Delta_\eta| \leq 2m\eta$. Enfin, d'après les hypothèses du lemme, les fonctions f , f_∞ et g sont uniformément bornées (f_∞ est uniformément bornée par $\|f\|_\infty$ d'après (4.19)). Alors, si nous choisissons $\eta = \epsilon / (8m\|g\|_\infty\|f\|_\infty)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_\eta} g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 \right| &\leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty 2m\eta = \epsilon/4 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \left| \int_{\Delta_\eta} g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| &\leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty 2m\eta = \epsilon/4. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

La bande de transparence B privée de l'ensemble Δ_η est la réunion finie d'intervalles vérifiant la condition (A.3). Nous pouvons donc appliquer le lemme A.1 dans chacun de ces intervalles. Alors, pour tout $\epsilon/2 > 0$, il existe $n_\epsilon(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty)$ tel que : $n \geq n_\epsilon(\|f\|_\infty, \|g\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty) \implies$

$$\left| \int_{B \setminus \Delta_\eta} g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 - \int_{B \setminus \Delta_\eta} g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \leq \epsilon/2. \quad (\text{A.36})$$

Nous coupons le membre de gauche de l'inégalité (A.36) en trois parties. Alors, d'après les inégalités (A.35, A.36),

$$\begin{aligned} &\left| \int_B g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 - \int_B g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \\ &\leq \left| \int_{B \setminus \Delta_\eta} g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 - \int_{B \setminus \Delta_\eta} g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \\ &+ \left| \int_{\Delta_\eta} g(\alpha_1) f[t_n^d(\alpha_1), r_n^u(\alpha_1)] d\alpha_1 \right| + \left| \int_{\Delta_\eta} g(\alpha_1) f_\infty(\alpha_1) d\alpha_1 \right| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Nous obtenons alors la preuve du lemme de la section 4.3.

Annexe B

Calcul de la limite des coefficients

Dans cette annexe B nous déterminons l'expression de l'intégrale (4.19) pour des fonctions f particulières ; nous déterminons la limite des coefficients de réflexion, de transmission et du carré de leur module. Enfin, nous souhaitons préciser que cette annexe purement calculatoire peut se révéler fastidieuse.

B.1 Calcul de la limite du coefficient de transmission

Dans cette section B.1 nous déterminons dans la bande de transparence B l'expression de l'intégrale

$$I_t = (2\pi)^{-1} \int_{[0,2\pi]} \frac{\beta^u}{q_c \cos v + iq_s \sin v / \sin \varphi} dv. \quad (\text{B.1})$$

De même que β^u , q_c , q_s et φ , I_t est une fonction de la variable $\alpha_1 \in B$. Dans l'expression (B.1) de I_t , la fonction de la variable v sous le symbole intégrale change de signe si nous ajoutons π à la variable v . L'intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ est donc opposée à l'intégrale sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$. Alors, l'expression de la limite du coefficient de réflexion est dans tous les cas

$$I_t = 0. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Calcul de la limite du coefficient de réflexion

Dans cette section B.2 nous déterminons dans la bande de transparence B l'expression de l'intégrale

$$I_r = (2\pi)^{-1} \int_{[0,2\pi]} \frac{p_c \cos v + ip_s \sin v / \sin \varphi}{q_c \cos v + iq_s \sin v / \sin \varphi} dv. \quad (\text{B.3})$$

De même que p_c , p_s , q_c , q_s et φ , I_r est une fonction de la variable $\alpha_1 \in B$. Nous avons montré dans la section 4.3. que le dénominateur se trouvant sous l'intégrale ne

s'annule jamais (4.17). Enfin, d'après la définition (4.4) de la bande de transparence B , la fonction $\sin \varphi$ n'est jamais nulle. Nous pouvons donc manipuler sans retenue l'expression (B.3) de l'intégrale I_r .

Dans l'expression (B.3) de I_r , la période de la fonction de la variable v sous le symbole intégrale est π . C'est pourquoi nous réalisons le changement de variable v en $z = \exp(2iv)$. Lorsque la variable v décrit l'intervalle $[0, \pi]$, la variable z décrit \mathcal{C} , le cercle de rayon 1 dans le plan complexe.

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \quad (\text{B.4})$$

Avec ce changement de variable, $\cos v = (\sqrt{z} + 1/\sqrt{z})/2$, $\sin v = (\sqrt{z} - 1/\sqrt{z})/(2i)$ et $dv = dz/(2iz)$. Alors, l'expression (B.3) de l'intégrale I_r devient

$$I_r = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathcal{C}} R_r(z) dz, \quad (\text{B.5})$$

où

$$\forall z \in \mathcal{C} : R_r(z) = z^{-1} \frac{p_c(\sqrt{z} + 1/\sqrt{z}) + p_s(\sqrt{z} - 1/\sqrt{z})/\sin \varphi}{q_c(\sqrt{z} + 1/\sqrt{z}) + q_s(\sqrt{z} - 1/\sqrt{z})/\sin \varphi}. \quad (\text{B.6})$$

Nous transformons l'expression (B.6) de $R_r(z)$; nous multiplions le numérateur et le dénominateur de $R_r(z)$ par $\sqrt{z} \sin \varphi$ et nous regroupons les termes en z . Nous obtenons alors

$$\forall z \in \mathcal{C} : R_r(z) = z^{-1} \frac{zp_+ + p_-}{zq_+ + q_-}, \quad (\text{B.7})$$

où

$$p_{\pm} = p_c \sin \varphi \pm p_s \quad \text{et} \quad q_{\pm} = q_c \sin \varphi \pm q_s. \quad (\text{B.8})$$

Le calcul de l'expression (B.5) de l'intégrale I_r se résume au calcul des résidus de la fraction rationnelle R_r . A ce stade nous séparons le problème en deux cas.

Premier cas : $|q_+| < |q_-|$ Dans ce cas, la fraction rationnelle R_r possède un unique pôle dans le disque unité en $z = 0$. D'après (B.7), le résidu de R_r est p_-/q_- en $z = 0$. Alors,

$$|q_+| < |q_-| \implies I_r = p_-/q_-. \quad (\text{B.9})$$

Second cas : $|q_+| > |q_-|$ Dans ce cas, la fraction rationnelle R_r possède deux pôles dans le disque unité en $z = 0$ et $z = -q_-/q_+$. D'après (B.7), les résidus de R_r sont p_-/q_- en $z = 0$ et $p_+/q_+ - p_-/q_-$ en $z = -q_-/q_+$. Alors,

$$|q_+| > |q_-| \implies I_r = p_-/q_- + (p_+/q_+ - p_-/q_-) = p_+/q_+. \quad (\text{B.10})$$

Conclusion L'expression de la limite du coefficient de réflexion est p_+/q_+ si $|q_+| > |q_-|$ et p_-/q_- si $|q_+| < |q_-|$. Nous pouvons regrouper ces résultats en remarquant que

$$|q_+| > |q_-| \iff T_{12} > 0. \quad (\text{B.11})$$

Preuve de la relation (B.11) Nous développons l'expression (B.8) du module carré de q_{\pm} .

$$|q_{\pm}|^2 = |q_c \sin \varphi \pm q_s|^2 = [q_c \sin \varphi \pm \Re(q_s)]^2 + \Im(q_s)^2.$$

D'après cette expression de q_{\pm} et (3.56),

$$|q_+|^2 - |q_-|^2 = \pm 4\Re(q_s)q_c \sin \varphi = \pm(\beta^u + \beta^d)(\beta^u \beta^d T_{12} - T_{21}) \sin \varphi. \quad (\text{B.12})$$

Dans la bande de transparence, $\sin \varphi > 0$ ce qui implique que nous devons examiner le signe de $\pm(\beta^u \beta^d T_{12} - T_{21})$. Pour cela, nous utilisons la propriété 3.2. D'après (3.37) et la définition (3.52) de φ ,

$$1 = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \iff T_{12}T_{21} = -\sin^2 \varphi - (T_{11} - T_{22})^2/4 < 0.$$

Le produit $T_{12}T_{21}$ étant négatif, le signe de $\pm(\beta^u \beta^d T_{12} - T_{21})$ est du signe de $\pm T_{12}$. Alors, d'après (B.12), $T_{12} > 0 \iff |q_+|^2 - |q_-|^2 > 0$. Nous avons montré la relation (B.11).

En combinant (B.9,B.10) avec (B.11), nous obtenons une expression de la limite du coefficient de réflexion valable dans tous les cas.

$$I_r = \frac{p_c \sin \varphi + p_s T_{12}/|T_{12}|}{q_c \sin \varphi + q_s T_{12}/|T_{12}|}. \quad (\text{B.13})$$

Enfin, nous remplaçons les fonctions p_c , p_s , q_c et q_s par leur expression (3.56) et nous utilisons la propriété 3.2. Alors, l'expression de la limite du coefficient de réflexion dans la bande de transparence B est

$$I_r = \frac{\beta^u - \beta_B}{\beta^u + \beta_B}, \quad (\text{B.14})$$

où pour tout $\alpha_1 \in B$:

$$\beta_B(\alpha_1) = \sin \varphi(\alpha_1)/|T_{12}(\alpha_1)| - i[T_{11}(\alpha_1) - T_{22}(\alpha_1)]/[2T_{12}(\alpha_1)]. \quad (\text{B.15})$$

B.3 Calcul de la limite du module carré du coefficient de transmission

Dans cette section B.3 nous déterminons dans la bande de transparence B l'expression de l'intégrale

$$I_{T,m} = (2\pi)^{-1} \int_{[0,2\pi]} \left| \frac{\beta^u}{q_c \cos v + iq_s \sin v / \sin \varphi} \right|^{2m} dv, \quad (\text{B.16})$$

pour $m = 1, 2$. De même que β^u, q_c, q_s et φ , $I_{T,m}$ est une fonction de la variable $\alpha_1 \in B$. Dans l'expression (B.16) de $I_{T,m}$, la période de la fonction de la variable v sous le symbole intégrale est π . Nous réalisons le changement de variable v en $z = \exp(2iv)$. Lorsque la variable v décrit l'intervalle $[0, \pi]$, la variable z décrit \mathcal{C} , le cercle de rayon 1 dans le plan complexe (B.4). Avec ce changement de variable, $\cos v = (\sqrt{z} + 1/\sqrt{z})/2$, $\sin v = (\sqrt{z} - 1/\sqrt{z})/(2i)$ et $dv = dz/(2iz)$. Alors, l'expression (B.16) de l'intégrale $I_{T,m}$ devient

$$I_{T,m} = (2i\pi)^{-1} \int_{\mathcal{C}} R_{T,m}(z) dz, \quad (\text{B.17})$$

où

$$\forall z \in \mathcal{C} : R_{T,m}(z) = z^{-1} \left| \frac{2\beta^u}{q_c(\sqrt{z} + 1/\sqrt{z}) + q_s(\sqrt{z} - 1/\sqrt{z})/\sin \varphi} \right|^{2m}. \quad (\text{B.18})$$

Nous transformons l'expression (B.18) de $R_{T,m}(z)$; nous multiplions le numérateur et le dénominateur de $R_{T,m}(z)$ par $(\sqrt{z} \sin \varphi)^{2m}$ et nous utilisons que $\bar{z} = 1/z$ pour tout $z \in \mathcal{C}$. Nous obtenons alors

$$\forall z \in \mathcal{C} : R_{T,m}(z) = z^{m-1} \left[\frac{2\beta^u \sin \varphi}{zq_+ + q_-} \right]^m \left[\frac{2\beta^u \sin \varphi}{z\bar{q}_- + \bar{q}_+} \right]^m, \quad (\text{B.19})$$

où les fonctions q_{\pm} sont définies par (B.8). Le calcul de l'expression (B.17) de l'intégrale $I_{T,m}$ se résume au calcul des résidus de la fraction rationnelle $R_{T,m}$. A ce stade nous séparons le problème en deux cas.

Premier cas : $|q_+| < |q_-|$ Dans ce cas, la fraction rationnelle $R_{T,m}$ possède un unique pôle d'ordre m en $z = -\bar{q}_+/\bar{q}_-$ dans le disque unité. Nous déterminons le résidu de $R_{T,m}$ en $z = -\bar{q}_+/\bar{q}_-$ pour $m = 1, 2$. Alors,

$$|q_+| < |q_-| \implies I_{T,1} = \frac{(2\beta^u \sin \varphi)^2}{|q_-|^2 - |q_+|^2} \quad \text{et} \quad I_{T,2} = \frac{|q_-|^2 + |q_+|^2}{|q_-|^2 - |q_+|^2} I_{T,1}^2. \quad (\text{B.20})$$

Second cas : $|q_+| > |q_-|$ Dans ce cas, la fraction rationnelle $R_{T,m}$ possède un unique pôle d'ordre m en $z = -q_-/q_+$ dans le disque unité. Nous déterminons le résidu de $R_{T,m}$ en $z = -q_-/q_+$ pour $m = 1, 2$. Alors,

$$|q_+| > |q_-| \implies I_{T,1} = \frac{(2\beta^u \sin \varphi)^2}{|q_+|^2 - |q_-|^2} \quad \text{et} \quad I_{T,2} = \frac{|q_+|^2 + |q_-|^2}{|q_+|^2 - |q_-|^2} I_{T,1}^2. \quad (\text{B.21})$$

Conclusion Nous pouvons regrouper les expressions (B.20) et (B.21) de $I_{T,1}$ et $I_{T,2}$. Dans tous les cas,

$$I_{T,1} = \frac{(2\beta^u \sin \varphi)^2}{\left| |q_+|^2 - |q_-|^2 \right|} \quad \text{et} \quad I_{T,2} = \frac{|q_+|^2 + |q_-|^2}{\left| |q_+|^2 - |q_-|^2 \right|} I_{T,1}^2. \quad (\text{B.22})$$

Nous remplaçons les fonctions q_{\pm} par leur expression (B.8,3.56) en fonction de la matrice T et de la fonction φ . Enfin, nous utilisons que

$$\begin{aligned} |q_{\pm}| > |q_{\mp}| &\implies |q_{\pm}|^2 = |\beta^u + \beta_B|^2 |\beta^d + \beta_B|^2 T_{12}^2/4, \\ |q_{\mp}|^2 &= |\beta^u - \beta_B|^2 |\beta^d - \beta_B|^2 T_{12}^2/4, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

où la fonction β_B est définie par (B.15). Nous pouvons alors exprimer les intégrales $I_{T,1}$ et $I_{T,2}$ en fonction de β^u , β^d et β_B :

$$\begin{aligned} I_{T,1} &= \frac{(\beta^u/\beta^d) |2\beta^u 2\Re(\beta_B)| |2\beta^d 2\Re(\beta_B)|}{|\beta^u + \beta_B|^2 |\beta^d + \beta_B|^2 - |\beta^u - \beta_B|^2 |\beta^d - \beta_B|^2}, \\ I_{T,2} &= \frac{|\beta^u + \beta_B|^2 |\beta^d + \beta_B|^2 + |\beta^u - \beta_B|^2 |\beta^d - \beta_B|^2}{|\beta^u + \beta_B|^2 |\beta^d + \beta_B|^2 - |\beta^u - \beta_B|^2 |\beta^d - \beta_B|^2} I_{T,1}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

B.4 Calcul de la limite du module carré du coefficient de réflexion

Dans cette section B.3 nous déterminons dans la bande de transparence B l'expression de l'intégrale

$$I_{R,m} = (2\pi)^{-1} \int_{[0,2\pi]} \left| \frac{p_c \cos v + ip_s \sin v / \sin \varphi}{q_c \cos v + iq_s \sin v / \sin \varphi} \right|^{2m} dv, \quad (\text{B.25})$$

pour $m = 1, 2$. De même que p_c, p_s, q_c, q_s et φ , $I_{R,m}$ est une fonction de la variable $\alpha_1 \in B$. Nous pouvons utiliser les résultats établis dans la section précédente B.3. En effet, d'après la conséquence (3.57) de la conservation du flux du vecteur de Poynting, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|r_n^u|^2 = 1 - (\beta^d/\beta^u) |t_n^d|^2 \quad \text{et} \quad |r_n^u|^4 = 1 - 2(\beta^d/\beta^u) |t_n^d|^2 + (\beta^d/\beta^u)^2 |t_n^d|^4. \quad (\text{B.26})$$

Alors, les limites $I_{R,1}$, $I_{T,1}$, $I_{R,2}$ et $I_{T,2}$ de ces fonctions vérifient également cette relation (B.26) :

$$I_{R,1} = 1 - (\beta^d/\beta^u) I_{T,1} \quad \text{et} \quad I_{R,2} = 1 - 2(\beta^d/\beta^u) I_{T,1} + (\beta^d/\beta^u)^2 I_{T,2}. \quad (\text{B.27})$$

En remplaçant les intégrales $I_{T,1}$ et $I_{T,2}$ par leur expression (B.24), nous obtenons l'expression des intégrales $I_{R,1}$ et $I_{R,2}$ en fonction de β^u , β^d et β_B .

Bibliographie

Bibliographie

- [1] E. Yablonovitch, T. Gmitter, and K. Leung, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2295 (1991).
- [2] E. Yablonovitch, “Photonic crystals,” *Modern Optics* **41**, 173–194 (1994).
- [3] V. P. Bykov, *Soviet J. Quant. Electron.* **4**, 861 (1975).
- [4] S. Berthier, *Les couleurs des papillons ou l’impérative beauté* (Springer-Verlag, France, 2000).
- [5] P. Vukusic, J. R. Sambles, and C. R. Lawrence, “Colour mixing in wing scales of a butterfly,” *Nature* **404**, 457 (2000).
- [6] H. Tada, S. E. Mann, I. N. Miaoulis, and P. Y. Wong, “Effects of a butterfly scale microstructure on the iridescent color observed at different angles,” *Applied Optics* **37**, 1579–1584 (1998).
- [7] R. C. McPhedran, N. A. Nicorovici, D. R. McKenzie, L. C. Botten, A. R. Parker, and G. W. Rouse, “The sea mouse and the photonic crystal,” Submitted to *Australian Journal of Physics*, October 2000 .
- [8] A. Reynolds, F. López-Tejeira, D. Cassagne, F. J. García-Vidal, C. Jouanin, and J. Sánchez-Dehesa, “Spectral properties of opal-based photonic crystals having a SiO₂ matrix,” *Phys. Rev. B* **60**, 11422 (1999).
- [9] W. B. Russel, D. A. Saville, and W. R. Schowalter, *Colloidal dispersions* (Cambridge University Press, 1995).
- [10] A. Moroz and C. Sommers, “Photonic band gaps of three-dimensional face-centered cubic lattices,” *J. Phys.: Condens. Matter* **11**, 997–1008 (1999).
- [11] S. Y. Lin, J. G. Fleming, D. L. Hetherington, B. K. Smith, R. Biswas, K. M. Ho, M. M. Sigalas, W. Zubrzycki, S. R. Kurtz, and J. Bur, “A three-dimensional photonic crystal operating at infrared wavelengths,” *Nature* **394**, 351–353 (1998).
- [12] J. G. Fleming and S.-Y. Lin, “Three-dimensional photonic crystal with a stop band from 1.35 to 1.95 μm ,” *Optics Letters* **64**, 49–51 (1999).
- [13] S.-Y. Lin, J. G. Fleming, R. Lin, M. M. Sigalas, R. Biswas, and K. M. Ho, “Complete three-dimensional photonic bandgap in a simple cubic structure,” *J. Opt. Soc. Am. B* **18**, 32–35 (2001).
- [14] J. Joannopoulos, R. Meade, and J. Winn, *Photonic crystals* (Princeton University Press, 1995).

- [15] M. Sigalas, C. Soukoulis, E. Economou, C. Chan, and K. Ho, “Photonic band gaps and defects in two dimensions: studies of the transmission coefficient,” *Phys. Rev. B* **48**, 14121–14126 (1993).
- [16] P. Villeneuve, S. Fan, and J. Joannopoulos, “Microcavities in photonic crystals: mode symmetry, tunability, and coupling efficiency,” *Phys. Rev. B* **54**, 7837–7842 (1996).
- [17] D. J. Ripin, K.-Y. Lim, G. S. Petrich, P. R. Villeneuve, S. Fan, E. R. Thoen, J. D. Joannopoulos, E. P. Ippen, and L. A. Kolodziejski, “One-dimensional photonic bandgap microcavities for strong optical confinement in GaAs and GaAs/Al_xO_y semiconductor waveguides,” *Journal of Lightwave Technology* **17**, 2152–2160 (1999).
- [18] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, “Scattering by a random set of parallel cylinders,” *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2526–2538 (1994).
- [19] G. Tayeb and D. Maystre, “Rigorous theoretical study of finite size two-dimensional photonic crystals doped by microcavities,” *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 3323–3332 (1997).
- [20] E. Centeno and D. Felbacq, “Light propagation control by finite-size effects in photonic crystals,” *Physics Letters A* **269**, 165–169 (2000).
- [21] S. Guenneau, Ph.D. thesis, Université d’Aix-Marseille I, 2001.
- [22] S. Guenneau, A. Nicolet, F. Zolla, C. Geuzaine, and B. Meys, “A finite element formulation for spectral problems in optical fibers,” *Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* **20**, 120–131 (2001).
- [23] B. Gralak, S. Enoch, and G. Tayeb, “Anomalous refractive properties of photonic crystals,” *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1012–1020 (2000).
- [24] K. Ho, C. Chan, and C. Soukoulis, “Existence of photonic gap in periodic dielectric structures,” *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152–3155 (1990).
- [25] H. Sözüer, J. Haus, and R. Inguva, “Photonic bands: convergence problems with the plane-wave method,” *Phys. Rev. B* **45**, 13962–13972 (1992).
- [26] *Electromagnetic theory of gratings*, R. Petit, ed., (Springer-Verlag, 1980).
- [27] A. Tip, “Linear absorptive dielectric,” *Phys. Rev. A* **57**, 4818–4841 (1998).
- [28] A. Tip, A. Moroz, and J. M. Combes, “Band structure of absorptive photonic crystals,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 6223–6252 (2000).
- [29] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* (Academic Press, 1972), Vol. I: Functional Analysis.
- [30] A. Figotin and A. Klein, “Localization of Classical Waves II. Electromagnetic Waves,” *Comm. Math. Phys.* **184**, 411–441 (1997).
- [31] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* (Academic Press, 1978), Vol. IV: Analysis of Operators.
- [32] A. Figotin and P. Kuchment, “Band-Gap Structure of the Spectrum of Periodic Dielectric and Acoustic Media. II. 2D Photonic Crystals,” *SIAM J. Appl. Math.* **56**, 561–620 (1996).

-
- [33] P. Kuchment, *Floquet Theory for Partial Differential Equations* (Birkhäuser Verlag, 1993).
- [34] A. Figotin and P. Kuchment, “Band-Gap Structure of the Spectrum of Periodic Dielectric and Acoustic Media. I. Scalar model,” *SIAM J. Appl. Math.* **56**, 68–88 (1996).
- [35] J. Korrying, *Physica* **13**, 392 (1947).
- [36] W. Kohn and N. Rostocker, *Phys. Rev.* **94**, 1111 (1954).
- [37] A. Moroz, “Density-of-states calculations and multiple-scattering theory for photons,” *Phys. Rev. B* **51**, 2068 (1995).
- [38] L. C. Botten, R. C. McPhedran, N. A. Nicorovici, A. A. Asatryan, C. M. de Sterke, P. A. Robinson, K. Busch, G. H. Smith, and T. N. Langtry, “Rayleigh multipole methods for photonic crystals calculations,” Submitted to PIER special issue on electromagnetic applications of PBG materials and structures .
- [39] A. Moroz, “Photonic crystals of coated metallic spheres,” *Europhys. Lett.* **50**, 466 (2000).
- [40] A. Tip, “Canonical formalism and quantization for a class of classical fields with application to radiative atomic decay in dielectric,” *Phys. Rev. A* **56**, 5022–5041 (1997).
- [41] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Lanoë, *Mécanique quantique* (Hermann, 1973), Vol. II.
- [42] Whittaker, “Inhibited emission in photonic woodpile lattices,” *Optics Letters* **25**, 779–781 (2000).
- [43] P. Yeh, A. Yariv, and C. S. Hong, *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 423 (1977).
- [44] P. Yeh, “Electromagnetic propagation in birefringent layered media,” *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 742–756 (1979).
- [45] S. Enoch, G. Tayeb, and D. Maystre, “Numerical evidence of ultrarefractive optics in photonic crystals,” *Optics Comm.* **161**, 171–176 (1999).
- [46] D. Felbacq, B. Guizal, and F. Zolla, “Wave propagation in one-dimensional photonic crystals,” *Optics Communications* **152**, 119–126 (1998).
- [47] D. Felbacq, B. Guizal, and F. Zolla, “Limit analysis of the diffraction of a plane wave by a one-dimensional periodic medium,” *J. Math. Phys.* **39**, 4604–4607 (1998).
- [48] D. Felbacq and G. Bouchitté, “High frequency scattering by a finely layered medium,” Submitted for publication .
- [49] D. Felbacq, B. Guizal, and F. Zolla, “Do Fresnel coefficients exist?,” Submitted for publication .
- [50] J. M. Bendickson and J. P. Dowling, “Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures,” *Phys. Rev. E.* **53**, 4107–4121 (1996).

- [51] A. Moroz, “Three-dimensional complete photonic-bandgap structures in the visible,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5274 (1999).
- [52] J. P. Dowling, “Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures,” *Phys. Rev. E* **53**, 4107–4121 (1996).
- [53] A. Figotin and V. Gortentsveig, “Localized electromagnetic waves in a layered periodic dielectric medium with a defect,” *Phys. Rev. B* **58**, 180–188 (1998).
- [54] A. Moroz, A. Tip, and J. M. Combes, “Absorption in periodic layered structures,” *Synthetic Metals* **116**, 481–484 (2001).
- [55] F. Zolla, D. Felbacq, and B. Guizal, “A remarkable diffractive property of photonic quasi-crystals,” *Optics Comm.* **148**, 6–10 (1998).
- [56] J. P. Hugonin and R. Petit, “Etude générale des déplacements à la réflexion totale,” *J. Optics (Paris)* **8**, 73–87 (1977).
- [57] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* (Academic Press, 1975), Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness.
- [58] H. Rigneault and S. Monneret, “Modal analysis of spontaneous emission in a planar microcavity,” *Phys. Rev. A* **54**, 2356–2368 (1996).
- [59] H. Rigneault, S. Robert, C. Begon, B. Jaquier, and P. Moretti, “Radiative and guided wave emission of Er^{3+} atoms located in planar multielectric structures,” *Phys. Rev. A* **55**, 1497–1502 (1997).
- [60] B. Gralak and D. Maystre, “Electromagnetic phenomenological study of photonic band structures,” *Modern Optics* **47**, 1253–1272 (2000).
- [61] L. C. Botten, M. S. Craig, R. C. McPhedran, J. L. Adams, and J. R. Andrewartha, “The dielectric lamellar diffraction grating,” *Optica acta* **28**, 413–428 (1981).
- [62] L. C. Botten, M. S. Craig, R. C. McPhedran, J. L. Adams, and J. R. Andrewartha, “The finitely conducting lamellar diffraction grating,” *Optica acta* **28**, 1087–1102 (1981).
- [63] L. C. Botten, M. S. Craig, and R. C. McPhedran, “Highly conducting lamellar diffraction grating,” *Optica acta* **28**, 1103–1106 (1981).
- [64] L. Li and C. W. Haggans, “Convergence of the coupled-wave method for metallic lamellar diffraction gratings,” *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 1184–1189 (1993).
- [65] L. Li, “A modal analysis of lamellar diffraction gratings in conical mountings,” *Journal of Modern Optics* **40**, 553–573 (1993).
- [66] L. C. Botten, N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, C. M. de Sterke, and A. A. Asatryan, “Photonic band structure calculations using scattering matrices,” Submitted to *Phys. Rev. E*.
- [67] A. Modinos, N. Stefanou, and V. Yannopapas, “Applications of the layer-KKR method to photonic crystals,” *Optics Express* **8**, 197–202 (2001).

-
- [68] G. Tayeb and R. Petit, "On the numerical study of deep conducting lamellar diffraction grating," *Optica Acta* **31**, 1361–1365 (1984).
- [69] S.-E. Sandström, G. Tayeb, and R. Petit, "Lossy multistep lamellar gratings in conical diffraction mountings: an exact eigenfunction solution," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* **7**, 631–649 (1993).
- [70] L. Li, "Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1024–1035 (1996).
- [71] L. Li, "New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings," *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 2758–2767 (1997).
- [72] J. Y. Suratteau, M. Cadilhac, and R. Petit, *J. Optics (Paris)* **14**, 273 (1983).
- [73] L. Li, "Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, 1870–1876 (1996).
- [74] P. Lalanne, "Effective properties and band structures of lamellar subwavelength crystals: plane-wave method revisited," *Phys. Rev. B* **58**, 9801–9807 (1998).
- [75] H. van der Lem and A. Moroz, "Towards two-dimensional complete photonic band-gap structures below infrared wavelengths," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **2**, 395–399 (2000).
- [76] L. Li, "Justification of matrix truncation in the modal methods of diffraction gratings," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **1**, 531–536 (1999).
- [77] D. Maystre, in *Electromagnetic theory of gratings*, R. Petit, ed., (Springer-Verlag, 1980), chapter 3: integral methods.
- [78] E. Popov and M. Nevière, "Grating theory: new equations in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization," *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1773–1784 (2000).
- [79] E. Popov and M. Nevière, "Maxwell equations in Fourier space: fast converging formulation for diffraction by arbitrary shaped, periodic, anisotropic media," To appear in *J. Opt. Soc. Am. A* .
- [80] J. P. Dowling and C. M. Bowden, "Anomalous index of refraction in photonic bandgap materials," *Modern Optics* **41**, 345–351 (1994).
- [81] E. Popov, M. Nevière, B. Gralak, and G. Tayeb, "Staircase approximation validity for arbitrary shaped gratings," Submitted to *J. Opt. Soc. Am. A*, March 2001 .
- [82] M. Duneau and A. Katz, "Quasiperiodic structures obtained by the projection method," *Jour. Phys. Paris C3* **47**, 103–113 (1986).
- [83] D. N. Chigrin, A. V. Lavrinenko, D. A. Yarotsky, and S. V. Gaponenko, "All-dielectric one-dimensional periodic structures for total omnidirectional reflection and partial spontaneous emission control," *J. of Lightwave Technology* **17**, 2018–2024 (1999).
- [84] H. Rigneault, F. Lemarchand, A. Sentenac, and H. Giovannini, "Strong extraction coefficient for sources located inside waveguide grating structures," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **1**, 507–511 (1999).

Theoretical and numerical study of properties of photonic bandgap structures

Abstract This work is centered on the theoretical and numerical study of the photonic crystals properties. We consider, in an increasing order of complexity, the cases of 1D, 2D and 3D structures.

We pay a detailed attention on the dispersion relations of the Bloch modes of the crystal. This relation indeed contains a great number of information, not only on the field in the crystal (on the energy propagation for example), but it also makes it possible to understand and predict how is carried out the coupling, at the borders of a limited crystal, between the interior field and the external field.

The exploitation of these properties enable us to predict, then to simulate numerically, some situations in which the photonic crystals behave like mediums of optical index lower than that of the vacuum (ultra-refraction), even of negative optical index. It is shown for example that it is possible to design micro-lenses whose dimensions and focal distance are a few tens of wavelengths.

We worked out a numerical method particularly adapted to the woodpile photonic crystals. It takes as a starting point the technique of the exact eigenvalues and eigenfunctions used for the 2D lamellar gratings. This method is extremely efficient since it makes it possible to treat woodpile 3D structures with computation times comparable with the most powerful of the 2D methods.

By this means, we have access to the dispersion relations (with this aim in view, we developed a technique allowing to obtain without numerical instabilities the eigenvalues and the eigenvectors of the transfer matrix through a grating layer), to the ratio of energy transmitted through a finite thickness of the crystal, and also to the field emitted in 3D by an optical source in the presence of a woodpile photonic crystal.

Key words electromagnetism, optics, photonic crystal, woodpile, lamellar grating, diffraction by grating, Floquet-Bloch reduction, spontaneous emission, ultra-refraction, transfer matrix, numerical methods.